Wasserstein 距離によるデータ同化

竹田航太

2023 年 1 月 18 日

目次

1 基礎

OT に関する基礎的な参考文献 [1, 2, 3]

2 結果

2.1 OT for Variational DA

[4] は状態空間を関数空間で定め，関数間距離に Wasserstein を使った目的関数で変分法を考えた．目的関数の勾配を OT に性質を使って計算した．

分布としてどうかできていない．誤差解析をできないのが課題．最適化問題の Well-posedness（解の一意存在等）がわかっていない．

$\Omega \subset \mathbb{R}^d$ を凸で有界な閉集合とする．状態空間を

$$\mathcal{P}(\Omega) = \{\rho \geq 0 \mid \int_\Omega \rho(x)dx = 1\}$$

ととる．

$\rho_0, \rho_1 \in \mathcal{P}(\Omega)$ に対して，Wasserstein 距離は流体力学的定式では

$$\mathcal{W}(\rho_0, \rho_1)^2 = \min_{(\rho,\mathbf{v})\in C(\rho_0,\rho_1)} \int\int_{[0,1]\times\Omega} \rho(x,t)|\mathbf{v}(x,t)|^2 dtdx$$

で与えられる．ただし，

$$C(\rho_0,\rho_1)=\left\{\begin{array}{cc}(\rho,\mathbf{v})\text{ s.t.} & \begin{array}{c}\partial_t\rho+\mathrm{div}(\rho\mathbf{v})=0,\\ \rho(t=0)=\rho_0,\rho(t=1)=\rho_1,\\ \rho\mathbf{v}\cdot\mathbf{n}=0\text{ on }\partial\Omega\end{array}\end{array}\right\}$$

とする．また，最適な輸送の測度場は以下の Hamilton-Jacobi 方程式を満たす Φ を用いて $\mathbf{v}(x,t)=\nabla\Phi(x,t)$ と勾配でかける．

$$\partial_t\Phi+\frac{|\Phi|^2}{2}=0.$$

さらに，Kantrovich ポテンシャル $\Psi(x)$ という関数を

$$\Psi(x)=-\Phi(t=0,x)$$

と定義すると Wasserstein 距離は

$$W(\rho_0,\rho_1)^2=\int_\Omega\rho_0(x)|\nabla\Psi(x)|^2dx$$

と書ける．

次に，[5] を参照して接空間を $\rho_0\in\mathcal{P}$ に対し

$$T_{\rho_0}\mathcal{P}=\{\eta\in L^2(\Omega)\text{ s.t. }\eta=-\mathrm{div}(\rho_0\nabla\Phi)\text{ with }\Phi\text{ s.t. }\rho_0\frac{\partial\Phi}{\partial\mathbf{n}}\text{ on }\partial\Omega\}$$

と定めている．直感的には η は連続の式を満たすような $\partial_t\rho$ に対応すると考えられる．この空間において，L^2 内積 $\langle\cdot,\cdot\rangle_2$ と Wasserstein 内積 $\langle\cdot,\cdot\rangle_W$ を

$$\langle\eta,\eta'\rangle_W=\int_\Omega\rho_0\nabla\Phi\cdot\nabla\Phi'dx$$

と定めている．$\|\eta\|_W^2$ は η 動かした時の運動エネルギーに対応する．

Theorem 2.1 (Theorem 8.13 [1])**.** *$\rho_0,\rho_1\in\mathcal{P}(\Omega)$ と $\eta\in T_{\rho_0}\mathcal{P}$ に対して，十分小さい $\epsilon>0$ を取れば*

$$\frac{1}{2}W(\rho_0+\epsilon\eta,\rho_1)^2=\frac{1}{2}W(\rho_0,\rho_1)^2+\epsilon\langle\eta,\Psi\rangle_2+o(\epsilon)$$

が成り立つ．ただし，Ψ は Kantrovich ポテンシャル．

2.2 Ensemble DA with W-distance

[6] は事前分布と観測分布の補完を Wasserstein 距離を用いて定義した．事前分布と観測分布を Dirac 測度で表している．OT 的最適化時にはエントロピー正則化を行なっている．同化後も分布のサポート点数を保つため multinomial sampling scheme を使っているらしい．

観測が分布として得られている必要がある．誤差解析をできていない．補完比率や正則化パラメータに対する解析がない．

参考文献

[1] C. Villani. *Topics in optimal transportation.* American Mathematical Soc, 2003.

[2] JD Benamou and Y Brenier. A computational fluid mechanics solution to the monge-kantorovich mass transfer problem. *NUMERISCHE MATHEMATIK*, 84(3):375–393, JAN 2000.

[3] Filippo Santambrogio. Optimal transport for applied mathematicians calculus of variations, pdes, and modeling preface. In *OPTIMAL TRANSPORT FOR APPLIED MATHEMATICIANS: CALCULUS OF VARIATIONS, PDES, AND MODELING*, volume 87 of *Progress in Nonlinear Differential Equations and Their Applications*, pages VII+. 2015.

[4] Nelson Feyeux, Arthur Vidard, and Maelle Nodet. Optimal transport for variational data assimilation. *NONLINEAR PROCESSES IN GEOPHYSICS*, 25(1):55–66, JAN 30 2018.

[5] F Otto. The geometry of dissipative evolution equations: The porous medium equation. *COMMUNICATIONS IN PARTIAL DIFFERENTIAL EQUATIONS*, 26(1-2):101–174, 2001.

[6] Sagar K. Tamang, Ardeshir Ebtehaj, Peter J. van Leeuwen, Dongmian Zou, and Gilad Lerman. Ensemble riemannian data assimilation over the wasserstein space. *NONLINEAR PROCESSES IN GEOPHYSICS*, 28(3):295–309, JUL 6 2021.