確率過程と SDE

竹田航太

2023 年 5 月 23 日

概要

確率過程の基礎をまとめる．確率変数の定義や中心極限定理などの知識は前提とする．

1 Preliminary

確率論の基礎的な定義や Notation を記述する．

Notation

- 確率空間を $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ と書く．
- Ω 上の確率測度全体の集合を $\mathcal{M}_1(\Omega)$ と書く．
- 確率測度と確率密度関数を同じ記号で書くことがある．
- 確率変数は r.v. と略記する．特に断りがない場合は $\mathbb{R}$-値とする．
- 確率過程は s.p. と略記する．

1.1 確率変数

確率空間 $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ 上の $\mathbb{R}^n$-値確率変数 X のことを，前提となる確率空間を明示的に書かずに，$(\mathbb{R}^n, \mathcal{B}(\mathbb{R}^n), P)$ 上の確率変数 X と書くことがある．

1.2 確率変数の収束

Definition 1.1. $(\mathbb{R}^n, \mathcal{B}(\mathbb{R}^n), P)$ 上の *r.v.* の列 $(X_m)_{m\in\mathbb{N}}$ と *r.v.* X を考える．以下の *4* つの収束を定義する．

(1) X_m が X に概収束する．*(*$X_m \overset{a.s.}{\to} X$ などと書く．*)*
$\overset{def}{\Leftrightarrow} \lim_{m\to\infty} X_m(\omega) = X(\omega)$ *a.s.* ω

(2) X_m が X に L^p 収束する．*(*$X_m \overset{L^p}{\to} X$ などと書く．*)*
$\overset{def}{\Leftrightarrow} \lim_{m\to\infty} \mathbb{E}[|X_m - X|^p]^{1/p} = 0$

(3) X_m が X に確率収束する．*(*$X_m \xrightarrow{P} X$ *などと書く．)*
$\overset{def}{\Leftrightarrow}$ $\forall \epsilon > 0, \lim_{m\to\infty} P(|X_m - X| > \epsilon) = 0$

(4) X_m が X に法則収束する．*(*$X_m \xrightarrow{d} X$ や $X_m \xrightarrow{\mathcal{L}} X$ *などと書く．)*
$\overset{def}{\Leftrightarrow}$ 任意の F_X の連続点 x で $\lim_{m\to\infty} F_{X_m}(x) = F_X(x)$*(ただし，*$F_{X_m}, F_X$ *はそれぞれ* X_m, X *の分布関数)*
($\Leftrightarrow$ 像測度 P^{X_m} が P^X に弱収束する．*)*

Definition 1.2 (測度の弱収束)**.** $(\mathbb{R}^n, \mathcal{B}(\mathbb{R}^n), P)$ 上の確率測度 μ_m が μ に弱収束する．
$\overset{def}{\Leftrightarrow}$ 任意の有界連続関数 $f \in C_b(\mathbb{R}^n)$ に対して

$$\lim_{m\to\infty} \int_{\mathbb{R}^n} f d\mu_m = \int_{\mathbb{R}^n} f d\mu$$

確率空間 $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ を考える．

Definition 1.3 (確率過程)**.** $T \subset \mathbb{R}$ を与える．各 $t \in T$ に対して X_t が $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ 上の $r.v.$ であるとき $(X_t)_{t\in T}$ を確率過程という．

Definition 1.4. 任意の $0 \le s < t < \infty$ で $\mathcal{F}_s \subset \mathcal{F}_t \subset \mathcal{F}$ を満たす部分 σ 加法族の族 $\{F_t \mid t \ge 0\}$ をフィルトレーション *(filtration)* という．

最も簡単なフィルトレーションの取り方は $\mathcal{F}_t^X := \sigma(X_s \mid 0 \le s \le t)$ と任意の $s \in [0, t]$ で X_s が可測となるような σ 加法族を取ること．

Definition 1.5. フィルトレーション $\{F_t \mid t \ge 0\}$ に対し，X が適合的 *(adapted)* であるとは，任意の $t \ge 0$ で X_t が $\mathcal{F}_t$-可測であることである．

確率過程 X は明らかに $\{\mathcal{F}_t^X\}_t$-適合．
確率変数 $T : \Omega \to [0, \infty]$ をランダム時刻 (random time) という．

Definition 1.6 (停止時刻 (stopping time))**.** フィルトレーション付き可測空間 $(\Omega, \mathcal{F}, \{\mathcal{F}_t\})$ を考える．ランダム時刻 T は，任意の $t \le 0$ で事象 $\{T \le t\}$ が $\mathcal{F}_t$ に含まれるとき，*(*$\{\mathcal{F}_t\}$ *の)* 停止時刻と呼ばれる．

右連続なパスを持つ $\{\mathcal{F}_t\}$-適合な確率過程 X と $\Gamma \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$ に対し，

$$H_\Gamma(\omega) = \inf\{t \ge 0 \mid X_t(\omega) \in \Gamma\}$$

で到達時間 (hitting time) を定める．Γ が閉で X の path が連続なとき H_Γ は停止時刻になる．

1.3 マルチンゲール

Definition 1.7 (マルチンゲール)**.**

Theorem 1.8 (Doob の任意抽出定理)**.**

Theorem 1.9 (Doob 分解)**.**

Theorem 1.10 (Doob のマルチンゲール不等式)**.**

1.4 マルコフ性

Definition 1.11 (マルコフ性)**.**

2 Poison Process

Definition 2.1 (Poison 分布と指数分布)**.** $\lambda > 0$ に対して，$Z_+ = \mathbb{N} \cup \{0\}$ 値の *r.v.* N_λ がパラメータ λ の *Poison* 分布である．$\overset{def}{\Leftrightarrow}$ N_λ が以下に従う．

$$P(N_\lambda) = e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!}$$

$\lambda > 0$ に対して，$[0, \infty)$ 値の *r.v.* X_λ がパラメータ λ の指数分布 $\overset{def}{\Leftrightarrow}$ X_λ は以下に従う．

$$P(a \leq X_\lambda \leq b) = \int_a^b \lambda e^{-\lambda s} ds = e^{-\lambda a} - e^{-\lambda b}$$

Remark 2.2. *Posin* 分布は二項分布の連続 *ver*，指数分布は幾何分布の連続 *ver* である．

Theorem 2.3 (Poison の少数の法則)**.** $0 \leq p(n) \leq 1$ が $p(n)n = \lambda + o(1)(n \to \infty)$ を満たすとする．このとき

$$B(n, p(n)) \xrightarrow{d} N_\lambda$$

ただし，N_λ はパラメータ $\lambda > 0$ の *Poison* 分布．

Definition 2.4 (Poison 過程)**.** 確率過程 $(N(t))_{t \geq 0}$ が以下を満たすとき *Poison* 過程と呼ばれる．

(1) 任意の $n \in \mathbb{N}$ と任意の $0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_n$ に対して，
$(N(t_k) - N(t_{k-1}))_{k=1}^n$ は互いに独立．

(2) 任意の $s < t$ に対し，$N(t) - N(s)$ はパラメータ $\lambda(t - s)$ の *Poison* 分布に従う．

3 ブラウン運動とマルコフ性

Definition 3.1. 確率空間を $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ 上の確率過程 $(B(t))_{t \in [0,\infty)}$ が *1* 次元ブラウン運動 *(*または *Wiener* 過程*)*

$\overset{def}{\Leftrightarrow}$ $(B(t))_{t\in[0,\infty)}$ は以下を満たす.

(1) $B(0)=0,\ t\mapsto B(t)$ は連続 $a.s.\ \omega\in\Omega$

(2) 任意の $n\in\mathbb{N}$ と任意の $0=t_0<\cdots<t_n$ に対して,
$(B(t_i)-B(t_{i-1}))_{i=1}^n$ は互いに独立であり，それぞれ $N(0,t_i-t_{i-1})$ に従う.

3.1 ブラウン運動の構成

いくつかの構成方法が考えられる．パス空間 $C([0,\infty)\to\mathbb{R})$ 上の"Gaussian"である Weiner 測度を構成することを目標とする.

(1) $C([0,1]\to\mathbb{R})$ 上のブラウン運動を構成してつなぎ合わせる方法:
$C([0,1]\to\mathbb{R})$ の部分 Hilbert 空間を考え，その CONS$(e_i)_{i=1}^n$ に対する Gaussian 係数の線形和で確率変数を作る．この確率変数の収束先がブラウン運動となる.

(2) ランダムウォークのスケーリングによる構成:
ドンスカーの不変性定理から従う．ランダムウォークのパス空間への像測度がウィナー測度に弱収束することを示す．このために有限次元での収束と像測度の緊密性を使う.

(3) $(\mathbb{R}^{[0,\infty)},\mathcal{B}(R^{[0,\infty)}))$ 上に測度を構成する方法:

詳細は [1] を参照.

3.2 ブラウン運動の性質

Theorem 3.2 (Paley-Wiener-Zygmond)**.** $(B(t))_{t\in[0,1]}$ を *1* 次元ブラウン運動とする．このとき，$a.s.\ \omega\in\Omega$ で $t\mapsto B(t,\omega)$ は $\forall t\in[0,1]$ で微分不可能.

Theorem 3.3 (Kolmogorov の連続性定理 [2])**.**

Corollary 3.4 (ブラウン運動のヘルダー連続性)**.** $a.s.\ \omega\in\Omega$ と $\forall T>0$ と指数 $0<\gamma<1/2$ に対して，$t\mapsto B(t,\omega)$ は $t\in[0,T]$ で一様に γ-ヘルダー連続.

Theorem 3.5 (その他性質)**.** マルチンゲール，マルコフ，強マルコフ

4 確率微分方程式

4.1 伊藤積分

Definition 4.1 (初等的な関数)**.**

Theorem 4.2 (伊藤積分の等長性 (初等的な関数)).

Definition 4.3 (伊藤積分 (1 次元)).

Theorem 4.4 (伊藤積分の等長性).

Definition 4.5 (伊藤積分 (多次元)).

4.2 伊藤の公式

Definition 4.6 (伊藤過程).

Theorem 4.7 (伊藤の公式 (1 次元)).

Theorem 4.8 (伊藤の公式 (多次元)).

Theorem 4.9 (部分積分公式).

Theorem 4.10 (マルチンゲール表現定理).

4.3 確率微分方程式の解の存在

Definition 4.11 (確率微分方程式の (強) 解).

Theorem 4.12 (確率微分方程式の解と一意性).

5 拡散過程

確率空間 $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ を固定し，m 次元ブラウン運動 $(B_t)_{t\geq 0}$ と $\{B_s \mid s \leq t\}$ から生成される σ-加法族 $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$ を考える．

Definition 5.1. 次の確率微分方程式に従う確率過程 $X_t(\omega) = X(t,\omega) : [0,\infty) \times \Omega \to \mathbb{R}^n$ を伊藤拡散過程と呼ぶ[*1]．

$$dX_t = b(X_t)dt + \sigma(X_t)dB_t, \quad X_0 = x \tag{5.1}$$

ただし，$x \in \mathbb{R}^n$，$b : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$，$\sigma : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^{n\times m}$ は *Lipschitz* 連続とする．*(*このような *SDE* の一意な解が確かに存在する．*)* この *SDE* の解を X_t^x と書く．

$x \in \mathbb{R}^n$ に対して，$(X_t^x)_{t\geq 0}$ の確率法則 Q^x を導入する．つまり，$\mathcal{M}_\infty = \sigma(\{X_t^y \mid t \geq 0, y \in$

[*1] [2] の用語

$\mathbb{R}^n\}$) 上の測度 Q^x として

$$Q^x[X_{t_1} \in E_1, \ldots, X_{t_k} \in E_k] = P^0[X^x_{t_1} \in E_1, \ldots, X^x_{t_k} \in E_k]$$

と書く．ただし，P^0 は $(C[0,\infty)^d, \mathcal{B}(C[0,\infty))^d)$ 上の Wiener 測度．また，Q^x に関する期待値を $\mathbb{E}^x$ と書く．

5.1 拡散過程の性質

Theorem 5.2 (マルコフ性 [2])**.** 伊藤拡散過程はマルコフ性と強マルコフ性を持つ．つまり，有界可測関数 $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ に対して以下が成り立つ．

- マルコフ性：

$$\mathbb{E}^x[f(X_{t+s})|\mathcal{F}_t](\omega) = \mathbb{E}^{X_t(\omega)}[f(X_s)], \quad \forall t, s \geq 0.$$

- 強マルコフ性：上の式で t を停止時刻 $\tau : \Omega \to [0,\infty]$ で置き換えたもの．

Definition 5.3 (生成作用素)**.** 伊藤拡散過程 X^x_t の生成作用素 A を $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ について

$$Af(x) = \lim_{t\to 0} \frac{E[f(X^x_t)] - f(x)}{t}, \quad x \in \mathbb{R}^n$$

で定める．全ての $x \in \mathbb{R}^n$ でこの極限が存在する $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ 全体の集合を D_A と書く．

Theorem 5.4 (生成作用素の表式 [2])**.** $f \in C^2_0(\mathbb{R}^n)$ ならば $f \in D_A$ であり以下が成り立つ．

$$Af(x) = \sum_i b_i(x)\partial_{x_i} f(x) + \frac{1}{2}\sum_{i,j}(\sigma(x)\sigma^T(x))_{i,j}\partial_{x_i}\partial_{x_j} f(x)$$

Theorem 5.5 (ディンキンの公式 [2])**.** $f \in C^2_0(\mathbb{R}^n)$，停止時刻 τ は $\mathbb{E}^x[\tau] < \infty$ を満たすとする．このとき，伊藤拡散過程の解 $(X_t)_{t\geq 0}$ について以下が成り立つ．

$$\mathbb{E}^x[f(X_\tau)] = f(x) + \mathbb{E}^x[\int_0^\tau Af(X_s)ds].$$

流出時刻の計算に応用することでブラウン運動の再帰性を評価できる．

5.2 コルモゴロフの方程式

Theorem 5.6 (コルモゴロフの後退方程式 [2])**.** $f \in C^2_0(\mathbb{R}^n)$ とする．

$$u(t,x) = \mathbb{E}^x[f(X_t)], \quad t \geq 0, x \in \mathbb{R}^n \tag{5.2}$$

と定めると任意の $t \geq 0$ で $u(t,\cdot) \in D_A$ であり，u は以下を満たす．

$$\frac{\partial u}{\partial t} = Au, \quad t > 0, x \in \mathbb{R}^n, \tag{5.3a}$$

$$u(0,x) = f(x), \quad x \in \mathbb{R}^n. \tag{5.3b}$$

逆に (5.3) を満たす有界関数 $u \in C^{1,2}(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n)$ は (5.2) と書ける．

Remark 5.7. 有限時間 $T > 0$ に対して，$[0, T]$ 上で伊藤拡散過程を考え，変数変換 $t \to T - t$ を施したものをコルモゴロフの後退方程式と呼ぶことも多い．また，コルモゴロフの後退方程式をファインマンカッツの公式と呼ぶこともある．

Theorem 5.8 (ファインマンカッツの公式 [2])**.**

Remark 5.9. より一般の形や条件でのファインマンカッツの公式については *[1, Chapter 4]* を参照.

Theorem 5.10 (コルモゴロフの前進方程式 [2])**.** X_t を (5.1) の伊藤拡散過程とし，遷移確率が次のように密度関数 $p_t(x, y)$ を持つとする．

$$E^x[f(X_t)] = \int_{\mathbb{R}^n} f(y)p_t(x, y)dy, \quad f \in C_0^2(\mathbb{R}^n).$$

さらに, $t, x \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ を固定するごとに $y \mapsto p_t(x, y)$ は滑らかであるとする．このとき, $p_t(x, y)$ はコルモゴロフの前進方程式

$$\frac{dp_t}{dt} = A_y^* p_t \tag{5.4}$$

を満たす．ただし，A_y^* は y についての微分作用素

$$A_y^* \phi(y) = -\sum_i \partial_{y_i}[b_i(y)\phi(y)] + \frac{1}{2}\sum_{i,j} \partial_{y_i}\partial_{y_j}[(\sigma(y)\sigma^T(y))_{i,j}\phi(y)], \quad \phi \in C^2(\mathbb{R}^n)$$

である．

Remark 5.11. x を固定して $\rho(t, y; x) = p_t(x, y)$ と書くとこれは x をスタートした X_t の密度関数であり，(5.4) は密度関数の時間発展

$$\partial_t \rho(t, y) = A^* \rho(t, y)$$

を表す．これはフォッカープランク方程式とも呼ばれる．より一般には初期密度 $\rho_0(x)$ に対して，$\rho(t, y) = \int_{\mathbb{R}^n} p_t(x, y)\rho_0(x)dx$ となる．

Remark 5.12. 遷移確率密度 $p_t(x, y)$ の滑らかさについて，$\rho_0 \in C^2$ なら，$y \mapsto p_t(x, y)$ が超関数の意味まで滑らかさを落としても $y \mapsto \rho(t, y)$ が滑らかになりフォッカープランク方程式が成り立つ．

参考文献

[1] Steven E. Shreve Ioannis Karatzas. *Brownian Motion and Stochastic Calculus*. Springer New York, NY, 1998.

[2] B. エクセンダール. **確率微分方程式**. 丸善出版, 1999. 谷口説男訳.