Presentability of symmetric measures

竹田航太

2022 年 10 月 10 日

目次

1 Hewitt-Savage(不完全)

確率変数の「交換可能性」と積測度 (の混合) による表現可能性を結びつける数学的記述.

1.1 諸概念

$\mathcal{X}$ をある集合 X の部分集合の algebra とする．$\widetilde{\mathcal{X}}$ を X の可算コピーの集合とする ($\{a_i\}_{i=1}^{\infty}, a_i \in X$ のような列を要素とする．)．$\widetilde{\mathcal{X}}$ を「cylinder set」全体を含む最小の σ-algebra とする．詳細は [1] を見よ．$\mathbb{P}$ を $(X, \mathcal{X})$ 上の確率測度全体の集合とする．$\widetilde{\mathbb{P}}$ を「$\mathbb{P}$ の要素のコピーの無限積」全体の集合とする．

Definition 1.1. $(\widetilde{X}, \widetilde{\mathcal{X}})$ 上の確率測度 ν が *symmetric* とは以下が成り立つことを言う．$\forall A \in \widetilde{\mathcal{X}}$, $\forall T : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ *with bijection,* 有限個の自然数以外動かさない．*s.t.*

$$\nu(TA) = \nu(A).$$

この symmetric という性質は確率変数の「交換可能性」に対応する．

$\widetilde{\mathcal{S}}$ を symmetric な $(\widetilde{X}, \widetilde{\mathcal{X}})$ 上の確率測度全体の集合とする．定義から，$\widetilde{\mathbb{P}} \subset \widetilde{\mathcal{S}}$ がわかる．

$$\mathcal{P}^* = \sigma\left(\{N(E; , \lambda) = \{\pi \in \mathbb{P} \mid \pi(E) \leq \lambda\} \mid \lambda \in \mathbb{R}, E \in \mathcal{X}\}\right)$$

と定める[*1].

[*1] $\sigma(\cdot)$ は $\cdot$ を含む最小の σ-algebra を表す.

Definition 1.2. $\nu \in \widetilde{\mathcal{S}}$ が *presentable* とは以下が成り立つことを言う．$\exists \mu$ *with* $(\mathbb{P}, \mathcal{P}^*)$ 上の確率測度かつ可算加法的．*s.t.* $\forall A \in \mathcal{X}$

$$\nu(A) = \int_{\mathbb{P}} \tilde{\pi}(A) d\mu(\pi).$$

Hewitt と Savage は $\widetilde{\mathbb{P}}$ や $\widetilde{\mathcal{S}}$ の性質を調べて，$\widetilde{\mathcal{S}}$ の元が presentable になるための X と $\mathcal{X}$ に関する十分条件を導いている [1, 7 章など].

参考文献

[1] E HEWITT and LJ SAVAGE. Symmetric measures on cartesian products. *BULLETIN OF THE AMERICAN MATHEMATICAL SOCIETY*, 59(4):397, 1953.