

最適輸送

竹田航太

2022年6月17日

目次

1	Notations	1
2	Formulations	1
2.1	Monge's Formulation	1
2.2	Kantorovich's Formulation	2
3	Existence of Optimal Transport	3

1 Notations

決め事

- 位相空間 X 上の確率測度全体を $P(X)$ と書く.
- 可分な完備距離空間をポーランド空間 (Polish space) と呼ぶ.
- 関数 $f: X \rightarrow \mathbb{R}$ が $x_0 \in X$ で下半連続であるとは $\liminf_{x \rightarrow x_0} f(x) \geq f(x_0)$ が成り立つこと.

2 Formulations

最適輸送問題 (Optimal Transport Problem) を定式化は Monge の定式化と Kantorovich の定式化の2つある. 2つの位相空間 X, Y とその上の確率測度 $\mu \in P(X)$ と $\nu \in P(Y)$ を考える.

2.1 Monge's Formulation

測度 μ から ν へ質量を輸送するときの Lagrange 的な枠組みである. コスト関数 $c: X \times Y \rightarrow [0, \infty)$ を最小化する輸送を探す.

Definition 2.1. map $T : X \rightarrow Y$ が $\mu \in P(X)$ から $\nu \in P(Y)$ への transport map であるとは以下が成り立つこと.

$$\nu(B) = \mu(T^{-1}(B)), \quad \forall B : \nu - \text{可測}. \quad (2.1)$$

(2.1) が成り立つことを単に $\nu = T_{\#}\mu$ と書く.

任意の μ, ν に対して, Transport map がいつでも存在するとは限らない. 以下の場合 transport map が存在する.

- (1) $n \in \mathbb{N}$, $\mu = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \delta_{x_i}, \nu = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n \delta_{y_j}$.
- (2) $d\mu(x) = f(x)dx, d\nu(y) = g(y)dx$.

Definition 2.2 (Monge's Optimal Transport Problem). $\mu \in P(X), \nu \in P(Y)$ に対して

$$\text{minimize } \mathbb{M}(T) = \int_X c(x, T(x)) d\mu(x)$$

over μ -measurable $T : X \rightarrow Y$ with $\nu = T_{\#}\mu$.

2.2 Kantorovich's Formulation

Monge の定式化は “mass split “がある輸送を許さない. 例えば, transport map が存在しない次のような例の場合には問題を定式化できない. $\mu = \delta_x, \nu = \frac{1}{2}\delta_{y_1} + \frac{1}{2}\delta_{y_2}$ s.t. $y_1 \neq y_2$. Kantorovich の定式化は “mass split “を許した輸送を考えることができる.

$d\pi(x, y)$ が x から y へ輸送される質量を表すような同時分布 $\pi \in P(X \times Y)$ を考える. 次の制約がつく.

$$\pi(A \times Y) = \mu(A), \quad \pi(X \times B) = \nu(B), \quad \forall A \subset X, \forall B \subset Y : \text{可測}.$$

これを満たす $P(X \times Y)$ の部分集合を $\Pi(\mu \times \nu)$ と書き transport plans と呼ぶ. 自明な plan を考えれば $\mu \otimes \nu \in \Pi(\mu \times \nu)$ となるので $\Pi(\mu \times \nu) \neq \emptyset$.

Definition 2.3 (Kantorovich's Optimal Transport Problem). For given $\mu \in P(X), \nu \in P(Y)$,

$$\text{minimize } \mathbb{K}(\pi) = \int_{X \times Y} c(x, y) d\pi(x, y)$$

over $\pi \in \Pi(\mu, \nu)$.

3 Existence of Optimal Transport

Proposition 3.1 (Proposition 1.5 in [1]). X, Y をポーランド空間とする. $\mu \in P(X), \nu \in P(Y)$, $c: X \times Y \rightarrow [0, \infty)$ は下半連続とする. このとき \mathbb{R} の最小点 $\pi^\dagger \in \Pi(\mu, \nu)$ が存在する.

A sketch of proof. まず, $\Pi(\mu, \nu)$ が弱点列コンパクトであることを示す. μ, ν の内部正則性から $\Pi(\mu, \nu)$ が緊密 (tight) であることがわかり, 緊密性と Prokhorov の定理から $\Pi(\mu, \nu)$ の閉包が弱点列コンパクトであることが示される. $\Pi(\mu, \nu)$ が (弱位相で) 閉であることを示せば $\Pi(\mu, \nu)$ が弱点列コンパクトとなる.

弱コンパクト性から \mathbb{R} の最小化点列が, ある π^\dagger に弱収束する. コスト関数 c の下半連続性と Portmanteau の定理から π^\dagger は \mathbb{R} の最小化点となる. \square

Theorem 3.2 (A version of Brenier's Theorem, Theorem 4.2 in [1]). $X, Y \subset \mathbb{R}^n$ に対し, $\mu \in P(X), \nu \in P(Y)$ とする. さらに, μ と ν の 2 次モーメントが有限とし, μ は小さい集合上で値を持たないとする. コスト関数を $c(x, y) = \frac{1}{2}|x - y|^2$ とする. このとき, Kantorovich's Optimal Transport Problem の一意な解 $\pi \in \Pi(\mu, \nu)$ が存在し次のように表される.

$$d\pi^\dagger(x, y) = d\mu(x)\delta_{y=\nabla\varphi(x)}.$$

ただし, φ は μ -a.e. で定義された凸関数. これは $\nu = \nabla\varphi\#\mu$ を意味する.

Theorem 3.3 (Another version of Brenier's Theorem). $X, Y \subset \mathbb{R}^n$ に対し, $\mu \in P(X), \nu \in P(Y)$ はルベーグ測度に絶対連続とし, コスト関数を $c(x, y) = \frac{1}{2}|x - y|^2$ とする. このとき, Kantorovich's Optimal Transport Problem の一意な解 $\pi \in \Pi(\mu, \nu)$ が存在し次のように表される.

$$d\pi^\dagger(x, y) = d\mu(x)\delta_{y=\nabla\varphi(x)}.$$

ただし, φ は μ -a.e. で定義された凸関数. これは $\nu = \nabla\varphi\#\mu$ を意味する.

Corollary 3.4. Theorem 3.2 の条件のもとで $\nabla\varphi$ は Monge's Optimal Transport Problem の一意な解.

参考文献

- [1] Matthew Thorpe. Introduction to optimal transport. 2017.
- [2] Cédric Villani. Topics in optimal transportation. American Mathematical Society, 2003.
- [3] Filippo Santambrogio. Optimal Transport for Applied Mathematicians. Birkhäuser Cham, 2015.

- [4] Gabriel Peyré and Marco Cuturi. Computational optimal transport. 2018.
- [5] Timothy John Sullivan. *Introduction to uncertainty quantification*, volume 63. Springer, 2015.