

不等式まとめ

竹田航太

2022年2月11日

目次

1 初等不等式

1

概要

解析で使う不等式を基礎的なものからまとめる.

1 初等不等式

実数の 2 乗 : $x \in \mathbb{R}$

$$x^2 \geq 0.$$

三角不等式 : $x, y \in \mathbb{C}$

$$|x + y| \leq |x| + |y|.$$

より一般に次が成り立つ.

$$\begin{aligned} |x + y|^p &\leq |x|^p + |y|^p \quad (0 < p \leq 1), \\ |x + y|^p &\leq 2^{p-1}(|x|^p + |y|^p) \quad (p > 1). \end{aligned}$$

相加・相乗・調和 : $a, b \geq 0$

$$\frac{2ab}{a+b} \leq \sqrt{ab} \leq \frac{a+b}{2}.$$

Bernulli : $x > -1$

$$\begin{aligned} (1+x)^r &\leq 1+rx \quad (0 \leq r \leq 1), \\ (1+x)^r &\geq 1+rx \quad (r \geq 0 \text{ or } 1 \leq r). \end{aligned}$$

Cauchy-Schwarz : $d \in \mathbb{N}$, $x, y \in \mathbb{R}^d$ (より一般には内積空間に対して成り立つ.)

$$|\langle x, y \rangle| \leq \|x\| \|y\|.$$

(積に対する) Young : $a, b \geq 0, p, q \in (0, \infty)$ with $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$

$$ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}.$$