

Geometric Measure Theory — The Area Formula

竹田航太

2022年6月30日

目次

1	目標	1
2	Hausdorff 測度	1
3	The Area Formula	2

1 目標

\mathbb{R}^n に埋め込まれた曲面 (多様体) の面積を考えるために Hausdorff 測度を導入し, 曲面上の積分を Hausdorff 測度で表す. Lebesgue 積分との関係を示す The Area Formula が目標である.

2 Hausdorff 測度

$n \in \mathbb{N}$ とする. \mathbb{R}^n の Borel 集合全体の集合を $\mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ と書く. また, n 次元 Lebesgue 測度を \mathcal{L}^n と書く. 外測度から Carathéodory の方法を使って Hausdorff 測度を構成する.

Definition 2.1 (外測度). $\Gamma : 2^{\mathbb{R}^n} \rightarrow [0, \infty]$ が次の 3 つの条件を満たすとき \mathbb{R}^n 上の外測度という.

- (1) $\Gamma(\emptyset) = 0$.
- (2) (単調性) $A \subset B \Rightarrow \Gamma(A) \leq \Gamma(B)$.
- (3) (可算劣加法性) $\Gamma(\cup_{i=1}^{\infty} A_i) \leq \sum_{i=1}^{\infty} \Gamma(A_i)$.

Definition 2.2. (Carathéodory-可測性) Γ を \mathbb{R}^n 上の外測度とする. $E \subset \mathbb{R}^n$ が Γ -可測 (または Carathéodory-可測) とは以下がなりたつことである. 任意の $A \subset \mathbb{R}^n$ に対して

$$\Gamma(A) = \Gamma(A \cap E) + \Gamma(A \cap E^c)$$

となる.

Carathódory の方法により外測度の可測集合への制限により測度を定める. 特に集合族として Borel 集合を考える.

Definition 2.3. \mathbb{R}^n の外測度 Γ について 2 つの条件を考える.

(1) 任意の Borel 集合 $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ が Γ -可測である.

(2) 任意の $A \subset \mathbb{R}^n$ に対して, ある Borel 集合 $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ が存在して $\Gamma(A) = \Gamma(B)$ となる.

(1) が成り立つとき, Γ (の $\mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ への制限) を Borel 測度という. (1) に加えて (2) が成り立つとき, Γ (の $\mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ への制限) を Borel 正則測度という.

$m \in \mathbb{N}$ に対して, \mathbb{R}^n 上の m 次元 Hausdorff 測度を定める. $S \subset \mathbb{R}^n$ に対して, S の直径 (diameter) を

$$\text{diam}(S) := \sup\{|x - y| \mid x, y \in S\}$$

で与える.

さらに, m 次元閉単位球の Lebesgue 測度を $\alpha_m = \mathcal{L}^m(B^m(0, 1))$ とかく. $A \subset \mathbb{R}^n$, $\delta > 0$ に対して, 直径が δ 以下の集合による A の可算被覆全体の集合族を $G_A(\delta)$ とかく.

$$G_A(\delta) = \{(S_j)_{j \in \mathbb{N}} \mid A \subset \cup_j S_j, \forall j, \text{diam}(S_j) \leq \delta\}.$$

これを用いて Hausdorff 外測度を次のように定める.

$$\mathcal{H}^m(A) := \lim_{\delta \rightarrow 0} \inf_{S \in G_A(\delta)} \sum_{S_j \in S} \alpha_m \left(\frac{\text{diam}(S_j)}{2} \right)^m. \quad (2.1)$$

このように定めた \mathcal{H}^m は Borel 正則測度となる.

3 The Area Formula

$f: \mathbb{R}^l \rightarrow \mathbb{R}^n$ について, ある $L > 0$ が存在して, 任意の $x, y \in \mathbb{R}^l$ で

$$\|f(x) - f(y)\| \leq L\|x - y\|$$

が成り立つとき f を Lipschitz 連続という. これを満たす最小の L を Lipschitz 定数と呼び, $(\text{Lip } f)$ と書く.

Theorem 3.1. $l, m, n \in \mathbb{N}$, $f: \mathbb{R}^l \rightarrow \mathbb{R}^n$ を Lipschitz 連続とする. $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^l)$ に対して,

$$\int_{\mathbb{R}^n} N(f|A, y) \mathcal{H}^m(dy) \leq (\text{Lip } f)^m \mathcal{H}^m(A)$$

が成り立つ.

$f: \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$ と $A \subset \mathbb{R}^m$, $y \in \mathbb{R}^n$ に対して

$$N(f|A, y) = |\{x \in A \mid f(x) = y\}|$$

とおく. また, f が $a \in \mathbb{R}^m$ で微分可能なとき, $k \in \mathbb{N}$ に対して, k 次元 Jacobian $J_k f(a)$ を「 $Df(a)$ による単位 k 次元立方体の像の最大 k 次元体積」で定める.

Theorem 3.2 (The Area Formula 1, theorem 3.2.3 in [1]). $m \leq n$, $f: \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$ は Lipschitz 関数とする.

(1) $A \subset \mathbb{R}^m$ を \mathcal{L}^m -可測とすると

$$\int_A J_m f(x) \mathcal{L}^m(dx) = \int_{\mathbb{R}^n} N(f|A, y) \mathcal{H}^m(dy).$$

(2) $u: \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$ を \mathcal{L}^m -可積分関数とすると

$$\int_{\mathbb{R}^m} u(x) J_m f(x) \mathcal{L}^m(dx) = \int_{\mathbb{R}^n} \sum_{x \in f^{-1}(y)} u(x) \mathcal{H}^m(dx).$$

Theorem 3.3 (The Area Formula 2, theorem 3.2.5 in [1]). $m \leq n$, $f: \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$ は Lipschitz 関数, $A \subset \mathbb{R}^m$ は \mathcal{L}^m -可測, $g: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ とする. さらに, 以下のいずれかが成り立つとする.

(1) g は \mathcal{H}^m -可測.

(2) $N(f|A, y) < \infty$, \mathcal{H}^m -a.e. y .

(3) $\chi_A \cdot g \circ f \cdot J_m f$ は \mathcal{L}^m -可測.

このとき次が成り立つ.

$$\int_A g(f(x)) J_m f(x) \mathcal{L}^m(dx) = \int_{\mathbb{R}^n} g(y) N(f|A, y) \mathcal{H}^m(dy).$$

参考文献

- [1] Herbert Federer. *Geometric Measure Theory*. Classics in Mathematics. Springer, Berlin, Heidelberg, 1 edition, 1996.
- [2] Frank Morgan. *Geometric Measure Theory (Fifth Edition)*. Academic Press, 5 edition, 2016.