微分の一般化について

竹田航太

2026 年 4 月 28 日

1　汎函数の微分

汎函数とは，関数の空間の上での関数である．関数空間として，線形な空間で極限について閉じている Banach 空間 X を考える．X のノルムを $\|\cdot\|_X$ と書く．例えば，有界閉集合 Ω 上の連続関数の集合 X に $\|f\|_X = \sup_{x\in\Omega}|f(x)|$ というノルムを入れると集合とノルムの組 $(X, \|\cdot\|_X)$ は Banach 空間となる．Banach 空間は線形なのでその元が関数であってもベクトルと呼ぶことがある．Banach 空間 $(X, \|\cdot\|_X)$ 上の汎函数 $F : X \to \mathbb{R}$ について，F の点 $f \in X$ における**汎函数微分**とは，次を満たす有界線形汎函数 $\frac{\delta F}{\delta f}$ である．任意の変動ベクトル $g \in X$ に対して，

$$\left(\frac{\delta F}{\delta f}\right)[g] = \lim_{\epsilon\to 0}\frac{F(f+\epsilon g) - F(f)}{\epsilon} \tag{1.1}$$

が成り立つ．記号 $\left(\frac{\delta F}{\delta f}\right)[g]$ は $\langle\frac{\delta F}{\delta f}, g\rangle$ や $F'(f)[g]$ などと書かれることもあり，F の位置 f における変動ベクトル g 方向の方向微分である．