

DA/Bayes 推定の理論的 review(メモ)

竹田航太

2023年7月16日

目次

1	数学的定式化	1
1.1	記号	2
1.2	設定	2
1.3	基本的な目標	2
1.4	データ同化アルゴリズムの表現や導出・定式化	3
1.5	示すべきこと	4
1.6	条件・仮定	5
2	結果	5
2.1	Bayes	5
2.2	(MLE Consistency)	6
2.3	DA	6
2.4	Model	9
3	解析手法	10
4	研究者	10
4.1	David Kelly	10
4.2	Xin T. Tong	10
4.3	Jana de Wiljes	10

1 数学的定式化

データ同化やその元となる Bayes 推定の数学的定式化と示すべき事項について整理する。まず、ある力学系に従う時系列の推定問題をベイズ推定を用いて定式化する。さらに、理想的に得られた推定分布を逐次的に近似する方法が各種の (ベイズ的) データ同化アルゴリズムとなる。

1.1 記号

$\mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \cup \{0\}$ とする. 確率空間を $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ とする. $(\mathcal{X}, |\cdot|, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ を実 Hilbert 空間とする. \mathcal{X} 上の確率測度全体の集合を $\mathcal{M}_1(\mathcal{X})$ と書く. Banach 空間 \mathcal{X}, \mathcal{Y} に対して, 有界線形作用素 $A : \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{Y}$ 全体の集合を $\mathcal{L}(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$ と書く. 対称・(半)正定値な作用素 A を $A \succ 0$ ($A \succeq 0$) と書く.

1.2 設定

Hilbert 空間 \mathcal{X} 上の真の時系列はある力学系に従うとする*1.

$$\frac{du}{dt} = F(u). \quad (1.1)$$

力学モデル (1.1) に従う時間発展が 1-パラメータ半群 $\Psi_t : \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{X}$ で書けると仮定し, 時間 $h > 0$ の時間発展を $\Psi = \Psi_h$ とおくと, 以下の離散力学系を考えることもできる.

$$u_j = \Psi(u_{j-1}) \quad (1.2)$$

また, ノイズを含む力学系を考える場合もある.

$$u_j = \Psi(u_{j-1}) + \xi_j, \quad \xi_j \sim N(0, \Sigma) \quad (1.3)$$

ただし, ノイズ $\xi_j \in \mathcal{X}$ は i.i.d. な Hilbert 空間上の Gauss ノイズであり, 誤差共分散作用素 $\Sigma : \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{X}$ は対称・半正定値とする. どちらの定式化でも, 初期値は $\mu_0 \in \mathcal{M}_1(\mathcal{X})$ で表される不確実性を持つとする.

$$u_0 \sim \mu_0(du).$$

ノイズ $\xi_j \in \mathcal{X}$ は u_0 と独立であるとする. このとき, 真の時系列は確率過程 $u : \mathbb{N}_0 \times \Omega \rightarrow \mathcal{X}$ となる. モデルノイズがない場合は u_j は時間に依存せず $\sigma(\{u_0\})$ -可測であり, ノイズがある場合は $\mathcal{F}_j^u = \sigma(\{u_0, \xi_1, \dots, \xi_j\})$ -可測である.

次に, 時間間隔 $h > 0$ で別の Hilbert 空間 $\mathcal{Y} \subset \mathcal{X}$ 上の観測値が観測作用素 $\mathcal{H} : \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{Y}$ を通して得られると仮定する.

$$y_j = \mathcal{H}(u_j) + \eta_j, \quad \eta_j \sim N(0, \Gamma)$$

ここで, $\eta_j \in \mathcal{Y}$ は誤差共分散作用素が $\mathcal{L}(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$ かつ $\Gamma \succeq 0$ となる i.i.d. な観測ノイズであり, u_0 と全ての ξ_j と独立とする. 観測値は確率過程 $y : \mathbb{N} \times \Omega \rightarrow \mathcal{Y}$ で表され, 各 y_j は $\mathcal{F}_j^y = \sigma(\{u_0, \xi_1, \dots, \xi_j, \eta_1, \dots, \eta_j\})$ -可測である.

1.3 基本的な目標

データ同化 (フィルタリング問題) の目的は観測値 $Y_J = (y_j)_{j=1}^J$ と背景にある力学系の情報から, 真の時系列 u_j を近似する \mathcal{F}_j^y -可測な確率過程 v_j またはその分布を構成することにある. 特に, 時刻 $j \in \mathbb{N}$ での推定 $P(dv_j | Y_j)$ と観測値 y_{j+1} が与えられた際に, 時刻 $j+1$ での推定 $P(dv_{j+1} | Y_{j+1})$ が計算できる逐次的なアルゴリズムが求められる (図. 1).

*1 PDE は無限次元の力学系として考えるか, 空間離散化をして有限次元に帰着する.

表 1: モデルの設定

時間離散		時間連続	空間離散		空間連続
ノイズなし	離散力学系	連続力学系	ノイズなし	半離散力学系	無限次元力学系
ノイズあり	Markov 連鎖	SDE	ノイズあり	SDE	SPDE

(a) ODE.

(b) PDE. 時間は連続とする.

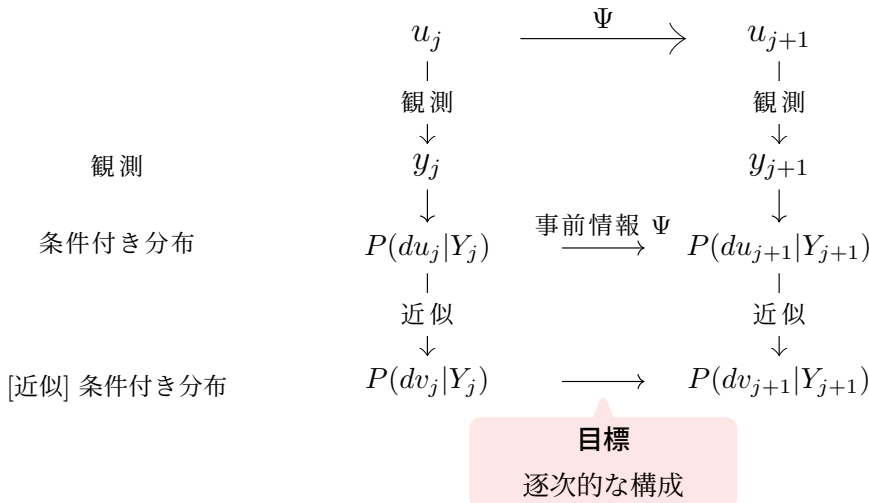


図 1: データ同化アルゴリズムのイメージ

Remark 1.1. 最初に与えるもの

- 推定初期値 $\mu_0(du_0)$.
- モデル Ψ . ノイズの情報もあれば
- 観測作用素 \mathcal{H} .
- 観測分布. 観測値から推定できているとする.
- 観測値 $(y_j)_{j=1}^J$. J がどんどん大きくなっていく場合もある.

1.4 データ同化アルゴリズムの表現や導出・定式化

計算上は平均値, 共分散や推定サンプル粒子の更新式で表現するとわかりやすい. これは, sample path もしくは Markov chain での表現といえる. 導出や解析の際には, まず分布の更新作用素でアルゴリズムを書き表し, 有限次元への近似作用素を設計することで各アルゴリズムを扱う方が良い. Gaussian への射影作用素を用いることで Kalman Filter が得られる. また, 分布の更新を輸送として捉え粒子近似を行うことで Particle Filter が導かれ, 2 次以下のモーメントのみ考慮した輸送の粒子近似を考えることで EnKF が得られる. EAKF や ETKF も輸送の粒子近似で表現される. このように輸送写像で分布の更新を表すことで粒子近似系のアルゴリズムを作ることができ [1], mean field や transport の表現といえる. 連続の場合には, sample path の表現が SDE となり分布の更新は Fokker-Planck 方程式に対応する. その他, Gradient Flow を用いて分布の更新を表現し, アルゴリズムを導出する方針もある [2].

1.5 示すべきこと

以下、データ同化問題において保証されるべきことを挙げる。考える問題によってどの概念が重要か、そもそも概念の対象外であるかが変わるので注意。

1.5.1 Wellposedness

1) 事後分布推定問題における分布の存在と一意性と観測データに対する連続性。 2) 事後確率最大化（点推定）における最大点の存在と一意性と観測データに対する連続性。一般に、2)の方が示すのが難しく、1)のロバスト性はBayes的に考えるメリット [3, p.67].

1.5.2 Posterior consistency

十分なデータが得られれば、真の状態 v^\dagger を recover できること。データ数が ∞ 、観測ノイズが0の極限において事後分布が真の状態にサポートを持つ Dirac 測度に収束することが保証されるべき。 $Y_J = (y_n)_{n=1}^J$,

$$d(\mu^{(Y_J, \Gamma)}, \delta_{v^\dagger}) \rightarrow 0? \quad (J \rightarrow \infty, tr(\Gamma) \rightarrow 0).$$

1.5.3 Stability

例えば、EnKFにおいて、誤差共分散行列の有界性や固有値に関する時間一様な評価。ensembleが発散したり、衝突しないことを保証する。

$$\|C_t\| \leq C, \quad \lambda_{\min}(C_t) > 0, \quad \lambda_{\max}(C_t) < \infty, \quad t \geq 0.$$

1.5.4 Bayesian Quality Assessment

理論的な事後分布 μ の個別のアルゴリズムによる近似 μ_{approx} がどれくらい近いかを評価すること。（離散化パラメータに対する連続性とも言える？）

$$d(\mu_{approx}, \mu) \leq ?.$$

例えば、PFにおけるアンサンブル数（粒子数） N での分布近似誤差の評価。

1.5.5 Signal Quality Assessment

信号推定（点推定）問題において推定値 \hat{u} が真の状態 u^\dagger をどれくらい近いかを評価すること。まず、データが真の状態を recover するのに十分な情報を持っているか（MLE consistencyとも言える？）を評価し、また、個別のアルゴリズムがどの程度情報を取り出せるかを評価する必要がある。

$$\limsup_{j \rightarrow \infty} \mathbb{E}[\|\hat{u}_j - u^\dagger(jh)\|_{\mathcal{X}}] \leq ?.$$

1.5.6 Ergodicity

PF型の推定分布が一意的な invariant measure に収束するか、それがどれくらい速いかを評価する。

1.5.7 sampling error

PF や PO などの stochastic filter (同化ステップで乱数を使用する) が有限 ensemble で精度が悪くなることの陽的な評価. QMC convergence^{*2}を用いて表現できるかもしれない.

1.5.8 computational complexity

アルゴリズムの計算量を評価することも重要. また, 並列化可能性等も検討すべき.

1.5.9 (model の Wellposedness 等)

モデルの誤差発達の評価がデータ同化の解析に必要である. そのために, モデル方程式の解や global attractor の存在などについても調べる必要がある.

1.6 条件・仮定

以下のような条件・仮定を緩和する理論が求められる.

- 観測ノイズ: 現状, 観測ノイズが**十分小さい**という仮定を置いたが多い. また, **正規分布**に従うという仮定も多い.
- 観測時間間隔: 観測時間の間隔が**十分短い**という仮定.
- 観測作用素: **線形と全成分観測**という仮定. 無限次元の問題ではフリーエスペクトル観測という定式化.
- 離散化: 時間方向は半群で解が得られる (離散化誤差がない) ことを仮定して解析が行われることが多い.

2 結果

2.1 Bayes

[4] 定式化の際には, 尤度やポテンシャル (= $-\log$ 尤度) に対して条件が課せられる. これは観測関数とノイズの設計に対する条件とも言える.

- (1) Standard assumption[4]: ポテンシャルに関する有界性や Lipschitz 性. Wellposedness に必要.
- (2) Identifiable[4]: 推定パラメータに対する尤度の”単射”性.
- (3) Regularity assumption[4]: 尤度に対する可微分性, 可積分性の条件. 最尤推定と比較する文脈 (Consistency) において用いられる.

^{*2} prior が QMC により N 個のアンサンブルで得られていた場合に, posterior が $O(N^{-1})$ で収束するか? stochastic filter の場合は, 収束レートが $O(N^{-1/2})$ に悪化するので良くない.

2.1.1 Wellposedness

無限次元 (1)generalized Bayes(H: Banach to Euclid): これで事後分布の形が決まる. (2)well-defined posterior: 事後分布が well-defined であることが示される. (3)Locally Lipschitz: 観測データに対する Hellinger 距離での Lipschitz 性.

2.1.2 Posterior Consistency

Bernstein-von Mises(Bayesian)

2.2 (MLE Consistency)

[4] (1)Consistency of the MLE, (2)Local asymptotic normality of the MLE

2.3 DA

表 2: データ同化の既存研究 (離散)

	L63	L96	2D NS	3D NS-alpha	general
3DVar	[5]	[6]			
4DVar					
KF					
PO					[7], [8, finite-dim]
ETKF	[8]				[8, finite-dim]
-					

表 3: データ同化の既存研究 (連続)

	L63	L96	2D NS	3D NS-alpha	general
nudging	[9]		[9]	[10]	
3DVar	[5]	[6]	[11]		
4DVar				[12]	
KBF					
EnKBF(PO)					[7]
EKBF	[13]				
LEKBF*3		[14]			
-					

2.3.1 真の Filtering 分布 (時間離散)

Theorem 2.1 (Locally Lipschitz w.r.t. obs, Theorem 2.15 in [3]). $\mathcal{X} = R^l$ とする. (1.3) に対する *smoothing problem* を考える. *path* 空間 \mathcal{X}^J 上の事前分布 μ_0 に対し $\mathbb{E}^{\mu_0}[\sum_{n=1}^J (1 + |\mathcal{H}(u_n)|^2)] < \infty$ とする. このとき, 任意の $r > 0$ に対して, ある $c = c(r)$ が存在して

$$d_{Hell}(\mu^y, \mu^{y'}) \leq c|y - y'|, \quad \forall |y|, |y'| \leq r.$$

ただし, μ^y と $\mu^{y'}$ は \mathcal{X}^J 上の事後分布. ([4] の *Locally Lip* と比較すべき)

$$\begin{aligned} J(u) &= \frac{1}{2}|u_0 - m_0|_{C_0^{-1}}^2 + \frac{1}{2} \sum_{j=1}^J |u_j - \Psi(u_{j-1})|_{\Sigma^{-1}}^2, \\ \Phi(u; y) &= \frac{1}{2} \sum_{j=1}^J |y_j - \Psi(u_j)|_{\Gamma^{-1}}^2, \\ I(u; y) &= J(u) + \Phi(u; y). \end{aligned}$$

MAP の wellposedness

Theorem 2.2 (MAP/4DVar と事後分布の関係 (Theorem 3.10, 12)). $\mathcal{X} = R^l$ とする. *stochastic model*(resp. *deterministic model*) に対して, $\Psi \in C^1$, $\mathcal{H} \in C^1$ のとき, $I(\cdot; y)$ (resp. $I_{det}(\cdot; y)$) は少なくとも一つの最小化点 $u^* \in \mathcal{X}^J$ (resp. $u_0^* \in \mathcal{X}$) を持ち, 事後分布は u^* で最大となる.

2.3.2 KF

1次元 KF を以下の model と観測について考える.

$$\Psi(u) = \lambda u, \mathcal{H}(u) = u, \quad \Sigma = \sigma^2, \Gamma = \gamma^2.$$

初期推定値 $m_0 \in \mathbb{R}$, $c_0 > 0$ で表す. Covariance c_j は表 4 の挙動を示す.

表 4: 1次元 KF の Cov の長時間挙動, Table 4.1 in [3]

	Limiting covariance for $\sigma^2 = 0$	Limiting covariance for $\sigma^2 > 0$
$ \lambda < 1$	$c_j \rightarrow 0$ (exponentially)	$c_j \rightarrow c_+^* = \mathcal{O}(\gamma^2)$ (exponentially)
$ \lambda = 1$	$c_j \rightarrow 0$ (algebraically)	$c_j \rightarrow c_+^* = \mathcal{O}(\gamma^2)$ (exponentially)
$ \lambda > 1$	$c_j \rightarrow c_-^* = \mathcal{O}(\gamma^2)$ (exponentially)	$c_j \rightarrow c_+^* = \mathcal{O}(\gamma^2)$ (exponentially)

2.3.3 Particle Filter

真の filtering 分布を実際のアプローチがどの程度近似できているかを評価する。Filtering step, Forecast step と sampling step をそれぞれ以下のように表す。^{*4}

$$\begin{aligned}(L_j \mu) du &= \frac{g_j(u) \mu(du)}{\int g_j(u) \mu(du)}, \\ (P \mu)(du) &= \int p(v, du) \mu(dv), \\ (S^N \mu)(du) &= \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N \delta_{u^{(n)}}(du), \quad u^{(n)} \sim \mu \text{ i.i.d.}\end{aligned}$$

ただし, $g_j(u_{j+1}) \propto \mathbb{P}(y_{j+1}|u_{j+1})$, $p(v, du)$ は (1.3) に対応する Markov kernel, $N \in \mathbb{N}$ はサンプルサイズ. PF で得られる filtering 分布 μ_j^N は以下を満たす.

$$\mu_{j+1}^N = L_j S^N P \mu_j^N, \quad \mu_0^N = N(m_0, C_0).$$

真の filtering 分布 μ_j は以下を満たす.

$$\mu_{j+1} = L_j P \mu_j, \quad \mu_0 = N(m_0, C_0).$$

Bayesian Quality Assessment

Theorem 2.3 (PF の離散化誤差, Theorem 4.5 in [3]). ある $\kappa \in (0, 1]$ が存在して任意の $u \in \mathcal{X}, j \in \mathbb{N}$ で $\kappa \leq g_j(u) \leq \kappa^{-1}$ が成り立つとする. このとき, 以下が成り立つ.

$$d_{TV}(\mu_j^N, \mu_j) \leq \sum_{j=1}^J (2\kappa^{-2})^j \frac{1}{\sqrt{N}}.$$

OPF の誤差解析と Ergodicity [15, Kelly-Stuart-Majda 2019].

2.3.4 3DVar

Theorem 2.4 ((部分観測)3DVar の stability, Theorem 4.10 in [3]). $\mathcal{X} = R^l$ とする. 観測が線形 $H : \mathcal{X} \rightarrow \mathbb{R}^d$ とする. 観測誤差が有界とする (*i.e.*, $\sup_{j \in \mathbb{N}} |\epsilon_j| = \epsilon$). *deterministic* な model を考え, $a < 1$ に対して, $(I - KH)\Psi : \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{X}$ が a -global Lipschitz となるように Background Covariance B をとるとする. このとき, ある $c > 0$ が存在して以下が成り立つ.

$$\limsup_{j \rightarrow \infty} \|m_j - u_j^\dagger\| \leq \frac{c}{1-a} \epsilon.$$

$\frac{c}{1-a} < 1$ と取れるとき, 3DVar でが観測より良い精度で推定できていることになる. 変数の依存関係は $K = K(B, \Gamma), B = B(\sigma, \Psi), a = a(K, H, \Psi), c = c(K)$.

Theorem 2.5. [5, Law-Shukla-Stuart 2014] Lorenz63, $H = (1, 0, 0)$, 離散・連続 3DVar の誤差解析.

Theorem 2.6. [6, Law-Alonso-Shukla-Stuart 2016] Lorenz96, 部分線形観測, 3DVar の誤差解析

^{*4} この表記は一般に使える.

2.3.5 4DVar

[12, Korn 2009] は Navier-Stokes-alpha 方程式について 4DVar の well-posedness を示した.

2.3.6 EnKF

Theorem 2.7 (PO(連続・離散) の誤差解析, Theorem 4.2 in [7]). 誤差評価がわかっている *deterministic model* とノイズ $N(0, \gamma^2 I)$ を持つ完全観測 $\mathcal{H} = I$ を仮定する. PO 法の *ensemble* 数を $N \in \mathbb{N}$ とする. $e_j^{(n)} = u_j^\dagger - u_j$ と書く. このとき, 各 *particle* の SE の期待値は

$$\mathbb{E}[|e_j^{(n)}|^2] \leq e^{2\beta h j} \mathbb{E}[|e_0^{(n)}|^2] + 2N\gamma^2 \left(\frac{e^{2\beta h j} - 1}{e^{2\beta h} - 1} \right), \quad n = 1, \dots, N, j \in \mathbb{N}.$$

さらに, *additive inflation* $C \rightarrow C + \alpha^2 I$ ($\alpha > 0$) を考えると, $\theta = \frac{\gamma^2}{\gamma^2 + \alpha^2} e^{2\beta h}$ に対して,

$$\mathbb{E}[|e_j^{(n)}|^2] \leq \theta^j \mathbb{E}[|e_0^{(n)}|^2] + 2N\gamma^2 \left(\frac{1 - \theta^j}{1 - \theta} \right), \quad n = 1, \dots, N, j \in \mathbb{N}.$$

$\theta < 1$ のとき, 右辺は $j \rightarrow \infty$ で $\frac{2N\gamma^2}{1-\theta}$ に収束する.

[8, Tong-Majda-Kelly 2016] は EnKF(PO) と ESKF を扱い, 線形観測を考えた (離散, model noise あり). エネルギー不等式と Lyapunov 関数を model や filtering の特徴づけに用いて, filtering 後のエネルギーの有界性を示し, filtering の安定性とした. (EnKF に付随する Markov chain の Lyapunov 関数を構成するために model のエネルギー不等式を利用した.) EnKF では真の filtering 分布への収束は言えないが, 縮小的であり一意な "invariant measure" に収束することを保証した.

2.3.7 EnKBF

EnKBF(時間連続) の誤差解析 [13, Wiljes-Reich-Stannat 2018] は完全観測, small noise などの条件で解の存在や誤差解析をしている. サンプルサイズ無限大での Covariance の固有値の bound も与えている. Localized EnKBF(時間連続 LEFKT) の誤差解析 [14, Wiljes-Tong 2020].

2.3.8 nudging

[9, Hayden 2011, L63 and NS2] [16, Bessaih 2015, noisy obs.] [10, Albanez 2016, NS-alpha]
Downscaling data assimilation: 粗いメッシュから再構成 [17, 2D NS], [18, Leray-alpha]

2.3.9 連続と離散

[7, 5, 19, 20]

2.3.10 その他

Filter divergence について [21, Kelly-Majda-Tong 2015]

2.4 Model

モデルの解析について [9, 6, 7] が Lorenz63, 96 や 2次元周期境界 Navier-Stokes 方程式の解の存在や誤差発達について議論した. [22] では正則化 3次元 Navier-Stokes 方程式に対して, 同様に線型項や非線型項

の評価が得られている.

3 解析手法

Gronwall の不等式, エネルギー不等式, Markov process/SDE の解析 (Coupling, Lyapunov 関数, Minorisation), 行列の固有値/スペクトル解析, Random Matrix,

4 研究者

4.1 David Kelly

google scholar: https://scholar.google.com/citations?hl=ja&user=c-dF0dIAAAAJ&view_op=list_works&sortby=pubdate

4.2 Xin T. Tong

National University of Singapore <https://sites.google.com/view/xintongthomson/home>

キーワード: DA, Sampling, Optimization, Nonlinear SDE

研究紹介スライドがいろいろある. <https://sites.google.com/view/xintongthomson/slides>

4.3 Jana de Wiljes

Potsdam 大学. Tong や Reich と共著がある. <https://www.math.uni-potsdam.de/~jdewiljes/>

参考文献

- [1] Edoardo Calvello, Sebastian Reich, and Andrew M. Stuart. Ensemble kalman methods: A mean field perspective, 2022.
- [2] Yifan Chen, Daniel Zhengyu Huang, Jiaoyang Huang, Sebastian Reich, and Andrew M. Stuart. Gradient flows for sampling: Mean-field models, gaussian approximations and affine invariance, 2023.
- [3] K. J. H. Law, A. M. Stuart, and K. C. Zygalakis. *Data Assimilation: A Mathematical Introduction*. Springer, 2015.
- [4] Timothy John Sullivan. *Introduction to uncertainty quantification*, volume 63 of *Texts in Applied Mathematics*. Springer, 2015.
- [5] Kody Law, Abhishek Shukla, and Andrew Stuart. Analysis of the 3dvar filter for the partially observed lorenz'63 model. *DISCRETE AND CONTINUOUS DYNAMICAL SYSTEMS*, 34(3, SI):1061–1078, MAR 2014.
- [6] K. J. H. Law, D. Sanz-Alonso, A. Shukla, and A. M. Stuart. Filter accuracy for the lorenz 96 model: Fixed versus adaptive observation operators. *PHYSICA D-NONLINEAR PHENOMENA*, 325:1–13, JUN 15 2016.

- [7] D. T. B. Kelly, K. J. H. Law, and A. M. Stuart. Well-posedness and accuracy of the ensemble kalman filter in discrete and continuous time. *NONLINEARITY*, 27(10):2579–2603, OCT 2014.
- [8] Xin T Tong, Andrew J Majda, and David Kelly. Nonlinear stability and ergodicity of ensemble based kalman filters. *Nonlinearity*, 29(2):657, jan 2016.
- [9] Kevin Hayden, Eric Olson, and Edriss S. Titi. Discrete data assimilation in the lorenz and 2d navier-stokes equations. *PHYSICA D-NONLINEAR PHENOMENA*, 240(18):1416–1425, SEP 1 2011.
- [10] Debora A. F. Albanez, Helena J. Nussenzveig Lopes, and Edriss S. Titi. Continuous data assimilation for the three-dimensional navier-stokes-alpha model. *ASYMPTOTIC ANALYSIS*, 97(1-2):139–164, 2016.
- [11] Evan Kwiatkowski and Jan Mandel. Convergence of the square root ensemble kalman filter in the large ensemble limit. *SIAM/ASA Journal on Uncertainty Quantification*, 3(1):1–17, 2015.
- [12] Peter Korn. Data assimilation for the navier–stokes- α equations. *Physica D: Nonlinear Phenomena*, 238(18):1957–1974, 2009.
- [13] Jana de Wiljes, Sebastian Reich, and Wilhelm Stannat. Long-time stability and accuracy of the ensemble kalman–bucy filter for fully observed processes and small measurement noise. *SIAM Journal on Applied Dynamical Systems*, 17(2):1152–1181, 2018.
- [14] Jana de Wiljes and Xin T Tong. Analysis of a localised nonlinear ensemble kalman bucy filter with complete and accurate observations. *Nonlinearity*, 33(9):4752–4782, jul 2020.
- [15] David Kelly and Andrew M. Stuart. Ergodicity and accuracy of optimal particle filters for bayesian data assimilation. *CHINESE ANNALS OF MATHEMATICS SERIES B*, 40(5):811–842, SEP 2019.
- [16] Hakima Bessaih, Eric Olson, and Edriss S. Titi. Continuous data assimilation with stochastically noisy data. *NONLINEARITY*, 28(3):729–753, MAR 2015.
- [17] Animikh Biswas, Ciprian Foias, Cecilia F. Mondaini, and Edriss S. Titi. Downscaling data assimilation algorithm with applications to statistical solutions of the navier-stokes equations. *ANNALES DE L INSTITUT HENRI POINCARÉ-ANALYSE NON LINEAIRE*, 36(2):295–326, MAR-APR 2019.
- [18] Aseel Farhat, Evelyn Lunasin, and Edriss S. Titi. A data assimilation algorithm: the paradigm of the 3d leray-alpha model of turbulence, 2017.
- [19] Ciprian Foias, Cecilia F. Mondaini, and Edriss S. Titi. A discrete data assimilation scheme for the solutions of the 2d navier-stokes equations and their statistics, 2016.
- [20] Cung The Anh, Bui Huy Bach, and Vu Manh Toi. Discrete data assimilation for the three-dimensional navier-stokes-alpha model. *ANNALES POLONICI MATHEMATICI*, 122(3):201–219, 2019.
- [21] David Kelly, Andrew J. Majda, and Xin T. Tong. Concrete ensemble kalman filters with rigorous catastrophic filter divergence. *PROCEEDINGS OF THE NATIONAL ACADEMY OF SCIENCES OF THE UNITED STATES OF AMERICA*, 112(34):10589–10594, AUG 25 2015.
- [22] C. Foias, D. D. Holm, and E. S. Titi. The three dimensional viscous camassa-holm equations, and their relation to the navier-stokes equations and turbulence theory. *Journal of Dynamics and Differential Equations*, 14(1), 2001.

- [23] Richard Nickl. Statistical theory. *Statistical Laboratory, Department of Pure Mathematics and Mathematical Statistics, University of Cambridge*, 2013.
- [24] 知之 樋口, 玄太 上野, 慎也 中野, 和幸 中村, and 亮 吉田. データ同化入門 : 次世代のシミュレーション技術. Number 6 in シリーズ予測と発見の科学. 朝倉書店, 2011.
- [25] Marco A Iglesias, Kody J H Law, and Andrew M Stuart. Ensemble kalman methods for inverse problems. *Inverse Problems*, 29(4):045001, mar 2013.
- [26] M. Branicki, A. J. Majda, and K. J. H. Law. Accuracy of some approximate gaussian filters for the navier–stokes equation in the presence of model error. *Multiscale Modeling & Simulation*, 16(4):1756–1794, 2018.
- [27] Michael S. Jolly, Tural Sadigov, and Edriss S. Titi. Determining form and data assimilation algorithm for weakly damped and driven korteweg–de vries equation — fourier modes case. *Nonlinear Analysis: Real World Applications*, 36:287–317, 2017.
- [28] Andrew J. Majda and Xin T. Tong. Rigorous accuracy and robustness analysis for two-scale reduced random kalman filters in high dimensions, 2016.
- [29] Sean P. Meyn and Richard L. Tweedie. *Markov chains and stochastic stability*. Springer Science & Business Media, 2005.