Lorenz 96 モデルを用いた
データ同化入門プログラムの解説
Ver. 0.1

竹田航太

2026 年 5 月 26 日

目 次

1 はじめに **1**
1.1 記号 1

2 Lorenz 96 モデルと数値予測 **2**
2.1 Lorenz 96 モデルとは 2
2.2 解とその性質 2
2.3 数値計算による予測 2

3 データ同化 **3**
3.1 データ同化問題の定式化 3

4 データ同化アルゴリズム **5**
4.1 カルマンフィルタによるデータ同化 5
4.2 データ同化アルゴリズムの検証 6

1 はじめに

この資料はLorenz 96 モデルを用いたデータ同化入門プログラム（https://github.com/KotaTakeda/da_course_l96/blob/main/l96.ipynb）の簡易的な解説記事である．なお，プログラムは理研データ同化オンラインスクール 2020 や同等の京大理学部の講義「データ同化 A」に影響を受けている．データ同化に関する詳細な解説は「データ同化の数理」（https://kotatakeda.github.io/math/book）上で予定している．

1.1 記号

1. ユークリッドノルムを $\|\cdot\|$ と書く．
2. 確率密度関数を $p(\boldsymbol{u})$ などと書く．

2 Lorenz 96 モデルと数値予測

2.1 Lorenz 96 モデルとは

Lorenz 96 モデルはデータ同化においてよく用いられる現象論的なトイモデルであり，以下のように常微分方程式で記述される [2, 3]．成分数もしくは地点数を表す 4 以上の整数 J に対して，状態ベクトル $\boldsymbol{u}(t) = (u^1(t), \cdots, u^J(t))^\top \in \mathbb{R}^J$ は

$$\frac{du^i}{dt} = (u^{i+1} - u^{i-2})u^{i-1} - u^i + F, \quad i = 1, \ldots, J, \tag{1}$$

に従う．ただし，初期値を $\boldsymbol{u}(0) = \boldsymbol{u}_0 \in \mathbb{R}^J$ とし，$u^{-1} = u^{J-1}$，$u^0 = u^J$，$u^{J+1} = u^1$ という周期境界に相当する条件を課す．$F \in \mathbb{R}$ は全地点に一様な外力を表す．方程式 (1) の右辺第 1 項は非線形な移流を表しており，第 2 項は散逸を表す．空間周期的に配置された J 個の地点で変動する仮想的な物理量を模したモデルである．後で説明する「カオス的な性質」が気象の時間発展と似ていることから典型的なベンチマークモデルとして気象予測のためのデータ同化仮想実験で広く用いられている．典型的なパラメータは $J = 40$，$F = 8$ である．

2.2 解とその性質

ここでは，Lorenz 96 モデル (1) の微分方程式としての性質について考える[1]．常微分方程式論の基本定理と次に示すエネルギー不等式から任意の初期値 $\boldsymbol{u}_0 \in \mathbb{R}^J$ に対し，(1) の滑らかな解 $\boldsymbol{u}(t)$ が時間大域的に存在することがわかる．この解 $\boldsymbol{u}$ について，以下のエネルギー不等式が成り立つ．

$$\|\boldsymbol{u}(t)\|^2 \le e^{-t}\|\boldsymbol{u}(0)\|^2 + JF^2(1 - e^{-t}).$$

これを用いると，解の軌道が有界な集合に吸い込まれることがわかる．つまり，$K = 2JF^2$ に対して閉球 $\mathcal{B} = \{\|u\|^2 \le K\}$ を定義すると，任意の $\boldsymbol{u}_0 \in \mathbb{R}^J$ について，ある時刻 $T = T(\|\boldsymbol{u}_0\|) > 0$ が存在して，任意の $t \ge T$ で $\boldsymbol{u}(t) \in \mathcal{B}$ が成り立つ．

これまでの議論で解が有界な範囲に落ち着くことはわかったが，Lorenz 96 モデルは（パラメータによっては）初期値がわずかにずれると軌道の差が指数的に拡大するという性質を持つ．これは初期値鋭敏性もしくは軌道不安定性と呼ばれる．次のように特徴づけられる．任意の $\boldsymbol{u}_0 \in \mathcal{B}$ と $\boldsymbol{v}_0 \in \mathbb{R}^J$ について，これらを初期値とする Lorenz 96 モデルの解をそれぞれ $\boldsymbol{u}(t)$，$\boldsymbol{v}(t)$ と書くと以下が成り立つ．

$$\|\boldsymbol{u}(t) - \boldsymbol{v}(t)\| \le e^{\beta t}\|\boldsymbol{u}_0 - \boldsymbol{v}_0\|. \tag{2}$$

ただし，$\beta = 2\sqrt{2J}F - 1$ である．この β は時間に対する誤差拡大率の上限として解釈できる．なお，(2) が成り立つために初期誤差 $\|\boldsymbol{u}_0 - \boldsymbol{v}_0\|$ が微小である仮定は必要ない．

2.3 数値計算による予測

前節で Lorenz 96 モデルの解の性質を確認したが，実際に未来の状態を予測するには微分方程式を解く必要がある．解析的に解くことはできないので，数値計算を用いる方法を紹介する[2]．以

[1]詳細は「データ同化の数理」（`https://kotatakeda.github.io/math/book`）で解説予定である．こちらが未完成の場合は [4] の 2 章を参照せよ．
[2]詳細は「データ同化の数理」（`https://kotatakeda.github.io/math/book`）で解説予定である．

下では一般の常微分方程式

$$\frac{d\boldsymbol{u}}{dt} = \boldsymbol{f}(t, \boldsymbol{u}), \quad \boldsymbol{u}(0) = \boldsymbol{u}_0$$

を考える．刻み幅 $\Delta t > 0$ を考えて，離散的な時間ステップ $t_n = n\Delta t$ で $\boldsymbol{u}(n\Delta t)$ の近似解 $\boldsymbol{u}_n$ を計算する [3]．最も単純な解法は Euler 法と呼ばれ，微分の定義から安直に離散化して得られる方法である．

$$\boldsymbol{u}_{n+1} = \boldsymbol{u}_n + \Delta t \boldsymbol{f}(t_n, \boldsymbol{u}_n), \quad n = 0, 1, \ldots,$$

Euler 法は $\boldsymbol{u}(\Delta t)$ の Taylor 展開の 1 次まで一致する近似解 $\boldsymbol{u}_1$ を計算することから 1 次精度の解法と呼ばれる．つまり，

$$\|\boldsymbol{u}_1 - \boldsymbol{u}(\Delta t)\| = O((\Delta t)^2)$$

が成り立つ．この 1 ステップでの誤差を局所誤差と呼ぶ．以下は（4 段 4 次の）Runge-Kutta 法と呼ばれる解法である．

$$\begin{cases} \boldsymbol{k}_1 = \Delta t \boldsymbol{f}(t_n, \boldsymbol{u}_n), \\ \boldsymbol{k}_2 = \Delta t \boldsymbol{f}(t_n + \frac{1}{2}\Delta t, \boldsymbol{u}_n + \frac{1}{2}\boldsymbol{k}_1), \\ \boldsymbol{k}_3 = \Delta t \boldsymbol{f}(t_n + \frac{1}{2}\Delta t, \boldsymbol{u}_n + \frac{1}{2}\boldsymbol{k}_2), \\ \boldsymbol{k}_4 = \Delta t \boldsymbol{f}(t_n + \Delta t, \boldsymbol{u}_n + \boldsymbol{k}_3), \end{cases}$$

$$\boldsymbol{u}_{n+1} = \boldsymbol{u}_n + \frac{1}{6}(\boldsymbol{k}_1 + 2\boldsymbol{k}_2 + 2\boldsymbol{k}_3 + \boldsymbol{k}_4).$$

単に，Runge-Kutta 法と呼ばれることもあるこの解法は 4 次精度であり，

$$\|\boldsymbol{u}_1 - \boldsymbol{u}(\Delta t)\| = O((\Delta t)^5)$$

が成り立つ．Euler 法と比較すると，Runge-Kutta 法は，Δt を小さくした時により速く真の解に収束する．他にも常微分方程式の数値解法は存在するが，ここではこの 2 つの紹介に留める．ここまでに示した誤差評価には，数値を有限桁で表現する（浮動小数点数を用いる）ことに由来する「丸め誤差」の影響は考慮されていない．丸め誤差も含めた誤差評価については，例えば [6] などを参照せよ．

3　データ同化

3.1　データ同化問題の定式化

一定間隔で得られる観測データを用いたデータ同化問題を定式化する際には，次の（離散時間の）状態空間モデルを考えると便利である [4]．時刻を $n = 0, 1, \ldots$ とする．

$$\begin{cases} \boldsymbol{u}_{n+1} = \boldsymbol{\Psi}(\boldsymbol{u}_n), & \text{ノイズなし時間発展モデル,} \quad (3a) \\ \boldsymbol{y}_{n+1} = \boldsymbol{h}(\boldsymbol{u}_{n+1}) + \boldsymbol{\xi}_{n+1}, & \text{ノイズあり観測モデル.} \quad (3b) \end{cases}$$

[3] $n = 0$ の時，初期値の記号 $\boldsymbol{u}_0$ と近似解の記号 $\boldsymbol{u}_0$ が重複するが気にしないことにする．

[4] 詳細は「データ同化の数理」（`https://kotatakeda.github.io/math/book`）で解説予定である．こちらが未完成の場合は [4] の 3 章を参照せよ．

ここで，状態次元 $N_x \in \mathbb{N}$ に対し，$\boldsymbol{\Psi} : \mathbb{R}^{N_x} \to \mathbb{R}^{N_x}$ はノイズがない時間発展モデルであり予測に用いられる．一方で，観測次元 $N_y \in \mathbb{N}$ に対し，$\boldsymbol{h} : \mathbb{R}^{N_x} \to \mathbb{R}^{N_y}$ は観測関数であり，$\boldsymbol{\xi}_{n+1} \in \mathbb{R}^{N_y}$ は観測ノイズと呼ばれ，モデリングに由来するバイアスや測定での統計的な誤差を表す．これ以降では，バイアスのない統計的な観測ノイズのみに制限し，独立同分布なガウスノイズ

$$\boldsymbol{\xi}_n \overset{\text{i.i.d}}{\sim} \mathcal{N}(\boldsymbol{0}, R) \tag{4}$$

と仮定する．観測誤差共分散行列 $R \in \mathbb{R}^{N_y \times N_y}$ は対称正定値とする．

例として，2.3 節で説明した常微分方程式の時間離散化を時間発展モデル (3a) として扱うことが多い[5]．このため，連続時間のモデル方程式を扱う場合には Lorenz 96 モデル（常微分方程式）+ Runge-Kutta 法（数値解法）のような組み合わせではじめて時間発展モデルが定まる．

データ同化問題（特に，フィルタリング問題） とは，各時刻 $n \in \mathbb{N}$ でその時刻までに得られている観測時系列 $\boldsymbol{y}_1, \ldots, \boldsymbol{y}_n$ の関数として，真の状態 $\boldsymbol{u}_n$ の推定値を計算することである．この際，状態空間モデル (3) やノイズの分布 (4) は既知とする．観測データに統計的なノイズが含まれていることを想定しているので，統計的に良い推定を考える必要がある．一つの方法は二乗誤差の期待値を最小化する推定を最適推定と定めることである．この場合，最適推定は条件付き期待値になることが知られている [7]．このように状態の推定値を計算することを目的とする場合は点推定と呼ばれる．

点推定に対して，分布の推定問題として状態推定を拡張するのがベイズ的データ同化問題である．目的は観測時系列 $\boldsymbol{y}_1, \ldots, \boldsymbol{y}_n$ に対する状態 $\boldsymbol{u}_n$ の条件付き分布 $p(\boldsymbol{u}_n \mid \boldsymbol{y}_1, \ldots, \boldsymbol{y}_n)$ を計算することに拡張される．ただし，確率密度関数で分布を表すことにする．条件付き分布 $p(\boldsymbol{u}_n \mid \boldsymbol{y}_1, \ldots, \boldsymbol{y}_n)$ は推定分布やフィルタ分布とも呼ばれる．

天気予報などの実運用では，固定された時間区間ではなく，時間経過とともに観測データが増える状況が想定される．この場合は，逐次データ同化と呼ばれるアプローチが取られる．初期の推定分布を $p(\boldsymbol{u}_0)$ として，以下の 2 ステップを繰り返すことで，推定分布 $p(\boldsymbol{u}_n \mid \boldsymbol{y}_1, \ldots, \boldsymbol{y}_n)$ を逐次的に得る．

(I) 予測: 時間発展モデル (3a) に従って，時刻 n の推定分布の不確実性を伝播させ，予測分布 $p(\boldsymbol{u}_{n+1} \mid \boldsymbol{y}_1, \ldots, \boldsymbol{y}_n)$ を得る．

$$p(\boldsymbol{u}_{n+1} \mid \boldsymbol{y}_1, \ldots, \boldsymbol{y}_n) = p\left(\boldsymbol{\Psi}^{-1}(\boldsymbol{u}_{n+1}) \mid \boldsymbol{y}_1, \ldots, \boldsymbol{y}_n\right). \tag{5}$$

ただし，$\boldsymbol{\Psi}^{-1}$ は逆像の意味である．

(II) 解析: 観測モデル (3b) から決まる尤度 $p(\boldsymbol{y}_{n+1} \mid \boldsymbol{u}_{n+1})$ とベイズの公式に基づいて，予測分布を条件づけることで時刻 $n+1$ における推定分布を得る．

$$p(\boldsymbol{u}_{n+1} \mid \boldsymbol{y}_1, \ldots, \boldsymbol{y}_{n+1}) = \frac{p(\boldsymbol{y}_{n+1} \mid \boldsymbol{u}_{n+1}) p(\boldsymbol{u}_{n+1} \mid \boldsymbol{y}_1, \ldots, \boldsymbol{y}_n)}{\int p(\boldsymbol{y}_{n+1} \mid \boldsymbol{u}) p(\boldsymbol{u} \mid \boldsymbol{y}_1, \ldots, \boldsymbol{y}_n)\, d\boldsymbol{u}} \tag{6}$$

ここで，尤度 $p(\boldsymbol{y} \mid \boldsymbol{u})$ とは状態 $\boldsymbol{u}$ が与えられた時の観測値 $\boldsymbol{y}$ の条件付き確率密度関数を $\boldsymbol{u}$ の関数として捉えたものである．

[5]ただし，数値誤差が無視もしくは抽象的に扱われていることがほとんどである．数値誤差を詳細に考慮したデータ同化の理論解析はまだ発展していない．

4　データ同化アルゴリズム

4.1　カルマンフィルタによるデータ同化

ある状態遷移行列 $M \in \mathbb{R}^{N_x \times N_x}$ と観測行列 $H \in \mathbb{R}^{N_y \times N_x}$ を用いて (3) が以下の線形系で与えられる場合を考える．

$$\begin{cases} \boldsymbol{u}_{n+1} = M\boldsymbol{u}_n, & \text{ノイズなし線形時間発展モデル,} \quad (7a) \\ \boldsymbol{y}_{n+1} = H\boldsymbol{u}_{n+1} + \boldsymbol{\xi}_{n+1}, & \text{ノイズあり線形観測モデル.} \quad (7b) \end{cases}$$

さらに，正定値行列 $P_0 \in \mathbb{R}^{N_x \times N_x}$ に対して，初期分布がガウス分布 $p(\boldsymbol{u}_0) = \mathcal{N}(0, P_0)$ であるとする．この時，逐次データ同化 (5)-(6) で得られる予測分布及び推定分布は全てガウス分布となる [1, 5]．このため，予測分布を $(\boldsymbol{m}_n^{\mathrm{f}}, P_n^{\mathrm{f}})$，推定分布を $(\boldsymbol{m}_n^{\mathrm{a}}, P_n^{\mathrm{a}})$ と書くと，カルマンフィルタ（Kalman filter: KF）と呼ばれる以下の更新式が得られる[6]．

(I) 予測: 推定分布の線形変換により予測分布の平均と共分散が得られる．

$$\boldsymbol{m}_{n+1}^{\mathrm{f}} = M\boldsymbol{m}_n^{\mathrm{a}}, \quad (8)$$

$$P_{n+1}^{\mathrm{f}} = MP_n^{\mathrm{a}}M^\top. \quad (9)$$

(II) 解析: 確率密度関数の指数を平方完成することで，推定分布の平均と共分散が得られる．

$$\boldsymbol{m}_{n+1}^{\mathrm{a}} = \boldsymbol{m}_{n+1}^{\mathrm{f}} + K_{n+1}(\boldsymbol{y}_{n+1} - H\boldsymbol{m}_{n+1}^{\mathrm{f}}), \quad (10)$$

$$P_{n+1}^{\mathrm{a}} = (I - K_{n+1}H)P_{n+1}^{\mathrm{f}}. \quad (11)$$

ここで，カルマンゲイン K_n は次式

$$K_n = P_n^{\mathrm{f}}H^\top(HP_n^{\mathrm{f}}H^\top + R)^{-1}$$

で与えられ，観測の食い違いに基づく状態更新の重みとして解釈できる．

カルマンフィルタは線形系にしか適用できないので，非線形系への拡張として，拡張カルマンフィルタ（Extended Kalman filter: ExKF）が知られている．線形時間発展モデル (7a) の代わりに，一般の時間発展モデル (3a) を考える場合は

(I) 予測: 平均は非線形に発展し，共分散はヤコビ行列 $J_n = D\boldsymbol{\Psi}(\boldsymbol{u}_n)$ で計算する．

$$\boldsymbol{m}_{n+1}^{\mathrm{f}} = \boldsymbol{\Psi}(\boldsymbol{m}_n^{\mathrm{a}}), \quad (12)$$

$$P_{n+1}^{\mathrm{f}} = J_nP_n^{\mathrm{a}}J_n^\top. \quad (13)$$

(II) 解析: KF と同様である．

非線形系のデータ同化問題では，平均と共分散のみで推定分布を表すことはできないため，ExKF は非線形系で計算できるように，無理やり定義したアルゴリズムとなっている．このため，ExKF を用いた状態推定は分布としての解釈はできない．

ExKF では，非線形写像による共分散行列の発展を線形化を用いて近似している．この時の誤差の影響で状態推定精度が著しく悪化する場合がある．このような状況において，状態推定を「安定

[6] https://kotatakeda.github.io/math/book の「データ同化の数理」の 10 章も参照せよ．

化」させるためのテクニックとして，共分散インフレーションが知られている．予測共分散 P^{f}_{n+1} は時刻 $n+1$ における，予測の不確実性を評価したものだが，インフレーションパラメータ $\alpha \geq 1$ を導入して，

$$P^{\mathrm{f}}_{n+1} \to \alpha^2 P^{\mathrm{f}}_{n+1}$$

のようにインフレーションさせる．予測の不確実性を大きめに見積もるのである．うまくパラメータ α を調整することで，状態推定精度が向上する可能性がある．

4.2　データ同化アルゴリズムの検証

データ同化アルゴリズムを検証するための標準的な方法として，**OSSE（Observing System Simulation Experiment）**または双子実験と呼ばれる枠組みがある．実際の観測データではなく，数値モデルから直接生成されたデータのみを使用する．OSSE の標準的な手順は以下の通りである．最終時刻を $N \in \mathbb{N}$ とする[7]．

1. 適当な初期値 $\boldsymbol{u}_0$ から (3a) に従い，真の解 $(\boldsymbol{u}_n)_{n=1}^N$ を数値的に計算する．
2. (3b) に従い，観測データ $(\boldsymbol{y}_n)_{n=1}^N$ を生成する．
3. 適当な初期値 $\boldsymbol{u}^{\mathrm{a}}_0$ と観測データ $(\boldsymbol{y}_n)_{n=1}^N$ に対して，逐次的にデータ同化アルゴリズムを適用し解析値 $(\boldsymbol{u}^{\mathrm{a}}_n)_{n=1}^N$ を得る．
4. 各時刻 $n = 1, \dots, N$ について，$\boldsymbol{u}_n$ と $\boldsymbol{u}^{\mathrm{a}}_n$ の誤差を計算する．

状態推定誤差を評価する標準的な指標として RMSE（Root Mean Square Error）がある．

$$\mathrm{RMSE}_n = \sqrt{\frac{1}{N_x}\sum_{i=1}^{N_x} |(\boldsymbol{u}^{\mathrm{a}}_n)_i - (\boldsymbol{u}_n)_i|^2} = \frac{\|\boldsymbol{u}^{\mathrm{a}}_n - \boldsymbol{u}_n\|}{\sqrt{N_x}}.$$

References

[1] K. J. H. Law, A. M. Stuart, and K. C. Zygalakis. *Data Assimilation: A Mathematical Introduction*. Springer, 2015.

[2] Edward N. Lorenz. “Predictability: A Problem Partly Solved”. In: *Proceedings of Seminar on Predictability*. ECMWF. Vol. 1. Shinfield Park, Reading: ECMWF, Sept. 4–8, 1995, pp. 1–18.

[3] Edward N. Lorenz and Kerry A. Emanuel. “Optimal Sites for Supplementary Weather Observations: Simulation with a Small Model”. In: *J. Atmos. Sci.* 55.3 (Feb. 1998), pp. 399–414. ISSN: 0022-4928, 1520-0469. DOI: 10.1175/1520-0469(1998)055<0399:OSFSWO>2.0.CO;2. URL: http://journals.ametsoc.org/doi/10.1175/1520-0469(1998)055%3C0399:OSFSWO%3E2.0.CO;2 (visited on 05/19/2025).

[4] Kota Takeda. “Error Analysis of the Ensemble Square Root Filter for Dissipative Dynamical Systems”. PhD thesis. Kyoto: Kyoto University, 2025.

[7]逐次データ同化のアプローチをしているため，新しい時刻の観測値を加えても最終時刻の解析値のみから次の解析値を計算できる．

[5] 中野慎也. **データ同化**. 東京: 共立出版, 2024. ISBN: 978-4-320-11277-3.

[6] 森正武. **数値解析**. 第 2 版. Tōkyō: 共立出版, 2002. ISBN: 978-4-320-01701-6.

[7] B. エクセンダール 著 and 谷口説男 訳. **確率微分方程式: 入門から応用まで**. 東京: 丸善出版, 2012. 400 pp. ISBN: 978-4-621-06176-3.