

Chapter12 Stochastic Galerkin Method

竹田航太

2021年5月13日

目次

1	Weak Formulation of Nonlinearities	1
2	Random ODE	3
3	Lax-Milgram and Random ODE	6
3.1	Stochastic Setting	7

1 Weak Formulation of Nonlinearities

weak problem の定式化をする. 次のような形の問題を考える. input data d に対して以下を満たす解 $u \in \mathcal{U}$ を求めたい. (\mathcal{U} は Banach 空間)

$$\mathcal{R}(u; d) = 0$$

この問題を以下のような weak problem に緩める

$$\langle \tau | \mathcal{R}(u; d) \rangle = 0 \quad \forall \tau \in \mathcal{T} \subset \mathcal{U}'$$

応用上は \mathcal{T} は有限次元にとる必要がある.

この章では確率空間 $(\Theta, \mathcal{F}, \mu)$ を仮定し, input data と output の解を確率変数として扱う. ランダムな空間 $S := L^2(\theta, \mu; \mathbb{R})$ と, deterministic な解の空間 \mathcal{U} に対して確率変数としての解の空間は $\mathcal{U} \otimes S$ とする. また, S の直交基底となる多項式系 $(\psi_k)_{k \in \mathbb{N}_0}$ をとって有限次元部分空間 $S_K := \text{span}\{\psi_0, \dots, \psi_K\}$ を考える. 方程式の非線型性を gPC 展開で扱う. gPC 展開の係数により確率変数の積の gPC 展開係数から計算する必要がある.

Definition 1.1 (Galerkin Multiplication). $(\psi_k)_{k \in \mathbb{N}_0}$ に対する *multiplication tensor* M_{ijk} を

以下で定める.

$$M_{ijk} := \frac{\langle \psi_i \psi_j \psi_k \rangle_\mu}{\langle \psi_k^2 \rangle_\mu} \quad \forall i, j, k \in \mathbb{N}_0$$

また, $index(i, j, k)$ が有限の場合にも同様の notation を使う.

Remark 1.2. (1) $M_{ijk} = M_{jik}$ ただし, k についての対称性はない.

(2) (M_{ijk}) は *sparse*

Example 1.1 (Multiplication tensor). S 内の確率変数の積を *gPC* 展開する.

$U = \sum_{k \in \mathbb{N}_0} u_k \psi_k, V = \sum_{k \in \mathbb{N}_0} v_k \psi_k \in S, W = UV \in S$ とする. 今 $W = \sum_{k \in \mathbb{N}_0} w_k \psi_k$ と *gPC* 展開したときの係数 w_k を u_k, v_k で表す.

$$\begin{aligned} W &= \sum_{i, j \in \mathbb{N}_0} u_i v_j \psi_i \psi_j \\ \Rightarrow w_k &= \frac{\langle W \psi_k \rangle}{\langle \psi_k^2 \rangle} = \sum_{i, j \in \mathbb{N}_0} M_{ijk} u_i v_j \end{aligned}$$

また, 有限次元空間 S_K で同じことを考える場合 $U, V \in S_K$ に対し, $W = UV$ は S_K に入るとは限らない. そのため, $W = \sum_{k \in \mathbb{N}_0} \sum_{i, j=0}^K M_{ijk} u_i v_j \psi_k$ を $k = K$ で打ち切って

$$U * V := \sum_{k \in K} M_{ijk} u_i v_j \psi_k$$

定める. *Galerkin product* や *pseudo product* と呼ばれる. これは $W (= UV)$ の S_K への直交射影となっている.

Theorem 1.3 (Galerkin product). $K \in \mathbb{N}_0$ とする. $U, V, W \in S_K$ に対して *Galerkin product* $*$ は以下を満たす.

- (1) $U * V = \pi_{S_K}(UV)$ (直交射影)
- (2) $U * V = V * U$
- (3) $(\alpha U) * (\beta V) = \alpha \beta (U * V)$
- (4) $(U + V) * W = U * W + V * W$

しかし, 結合則は満たさない. つまり $\exists U, V, W$ s.t. $U * (V * W) \neq (U * V) * W$

Proof. $U = \sum_{i=0}^K u_i \psi_i, V = \sum_{i=0}^K v_i \psi_i \in S_K$ とする.

(1):

$$UV - U * V = \sum_{k \geq K} \sum_{i, j=0}^K M_{ijk} u_i v_j \psi_k \in S_K^\perp$$

(2): M_{ijk} の i, j に対する対称性から従う.

$$U * V = \sum_{i,j,k}^K M_{ijk} u_i v_j \psi_k = \sum_{i,j,k}^K M_{ijk} v_j u_i \psi_k = V * U$$

(3),(4): 自明

結合則について

□

Remark 1.4. $U, V \notin S_K \Rightarrow U * V \neq \pi_{S_K}(UV)$

Proof.

□

2 Random ODE

微分方程式の初期条件や係数が不確実な場合である Random ODE の例を 2 つ挙げる. 用語として確率微分方程式 (Stochastic ODE) とは区別されるべきである.

Example 2.1 (radio deactive). まず, *deterministic* な放射能半減の方程式

$$\dot{u}(t) = -\lambda u(t) \quad u(0) = b \quad (2.1)$$

を考える. ただし, $\lambda, b > 0$. この解は $u(t) = be^{-\lambda t}$ であり半減期は $\lambda^{-1} \log 2$ となる.

次に, λ, b が *uncertain* な場合を考える. 確率空間 (Θ, μ) を仮定. 確率変数 $U(t), \Lambda, B \in S = L^2(\Theta, \mu; \mathbb{R})$ に対して, (2.1) に対応する方程式を考える.

$$\dot{U}(t) = -\Lambda U(t) \quad U(0) = B \quad (2.2)$$

S の *gPC basis* $(\psi_k)_{k \in \mathbb{N}_0}$ を考えて

$$\begin{aligned} \Lambda &= \sum_{k \in \mathbb{N}_0} \lambda_k \psi_k \\ B &= \sum_{k \in \mathbb{N}_0} b_k \psi_k \\ U(t) &= \sum_{k \in \mathbb{N}_0} u(t)_k \psi_k \end{aligned}$$

という *gPC* 展開を仮定する. (2.2) の ψ_k 方向への射影は

$$\begin{aligned} \langle \dot{U}(t) \psi_k \rangle &= -\langle \Lambda U(t) \psi_k \rangle \Leftrightarrow \langle \sum_{j \in \mathbb{N}_0} \dot{u}_j(t) \psi_j \psi_k \rangle = -\langle \sum_{i,j \in \mathbb{N}_0} \lambda_i u_j(t) \psi_i \psi_j \psi_k \rangle \\ &\Leftrightarrow \dot{u}_j(t) \langle \psi_k^2 \rangle = -\sum_{i,j \in \mathbb{N}_0} \lambda_i u_j(t) \langle \psi_i \psi_j \psi_k \rangle \\ &\Leftrightarrow \dot{u}_j(t) = -\sum_{i,j \in \mathbb{N}_0} \lambda_i u_j(t) M_{ijk} \end{aligned}$$

これは可算個の ODE になっている. $K \in \mathbb{N}$ での打ち切りを考えると,

$$A(\Lambda) := \left(\sum_{i=0}^K \lambda_i M_{ijk} \right)_{j,k=0}^K \in \mathbb{R}^{(K+1) \times (K+1)}$$

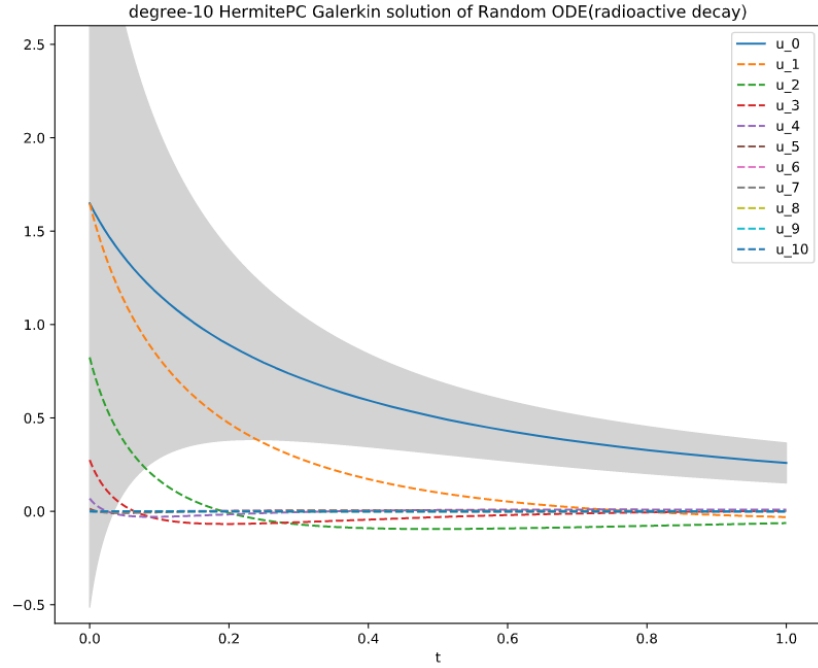
として ODE の行列表示が得られる.

$$\dot{\mathbf{u}}(t) = A(\Lambda)^\top \mathbf{u}(t), \quad \mathbf{u}(0) = \mathbf{b} \quad (2.3)$$

ただし, $\mathbf{u}(t) = (u_0(t), \dots, u_K(t))^\top$, $\mathbf{b} = (b_1, \dots, b_K)^\top$ *Galerkin truncation* 表示は

$$\frac{dU^{(K)}(t)}{dt} = -(\Pi_{S_K} \Lambda) * U^{(K)}(t), \quad U^{(K)}(0) = \Pi_{S_K} B \quad (2.4)$$

図1 Radioactive Random ODE



Example 2.2 (harmonic oscillator). 不確実な角周波数 Ω に対して調和振動子の方程式

$$\ddot{U}(t) = -\Omega^2 U(t), \quad U(0) = 1, \dot{U}(0) = 0 \quad (2.5)$$

を考える. $\Omega, \Omega^2 \in S = L^2(\Theta, \mu; \mathbb{R})$ として S の *gPC basis* $(\psi_k)_{k \in \mathbb{N}_0}$ に対して

$$\Omega = \sum_{k \in \mathbb{N}_0} \omega_k \psi_k$$

という展開を仮定. さらに $Y := \Omega^2 \in S$ を

$$Y = \sum_{k \in \mathbb{N}_0} \left(\sum_{p, q \in \mathbb{N}_0} \omega_p \omega_q M_{pqk} \right) \psi_k$$

と展開できる. $y_k = \sum_{p, q \in \mathbb{N}_0} \omega_p \omega_q M_{pqk}$ とおく. *Example 2.1* と同様に考えて,

$$\ddot{u}_k(t) = \sum_{i, j \in \mathbb{N}_0} M_{ijk} y_i u_j(t) \quad \forall k \in \mathbb{N}_0$$

$K \in \mathbb{N}$ で打ち切って $A \in \mathbb{R}^{(K+1) \times (K+1)}$ を以下で定めて

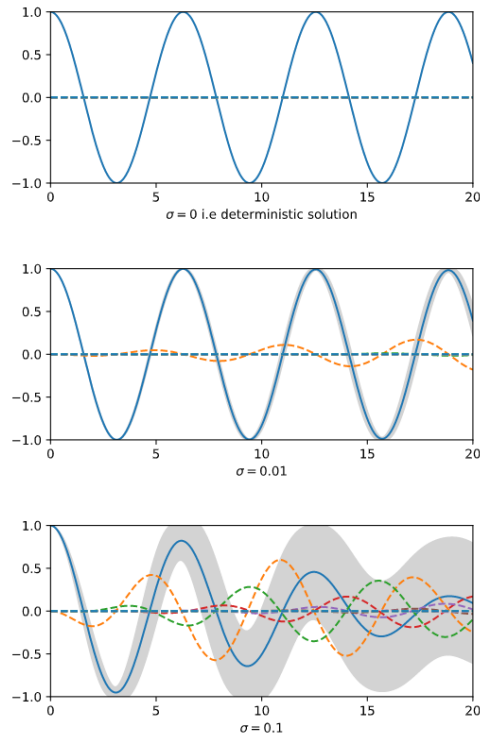
$$A = \left(\sum_{i=0}^K y_i M_{ijk} \right)_{j, k=0}^K = \left(\sum_{i=0}^K \left[\sum_{p, q \in \mathbb{N}_0} \omega_p \omega_q M_{pqi} \right] M_{ijk} \right)_{j, k=0}^K$$

Random Harmonic Oscillator の *Galarkin Equation* 行列表示

$$\ddot{\mathbf{u}}(t) = -A^\top \mathbf{u}(t), \quad \mathbf{u}(0) = (1, 0, \dots, 0)^\top, \quad \dot{\mathbf{u}}(0) = (0, \dots, 0)^\top \quad (2.6)$$

を得る. ただし, $\mathbf{u}(t) = (u_0(t), \dots, u_k(t))^\top$

図 2 Random Harmonic Oscillator



3 Lax-Milgram and Random ODE

Theorem 3.1 (Lax-Milgram Theorem). $(H, \|\cdot\|)$: Hilbert 空間, $a : H \times H \rightarrow \mathbb{R}$: 双線形形式で以下を満たすとする.

- (a) $\exists C > 0$ s.t. $\forall u, v \in H, |a(u, v)| \leq C\|u\|\|v\|$
 (b) $\exists c > 0$ s.t. $\forall v \in H, |a(v, v)| \geq c\|v\|^2$

このとき, 任意の dual の元 $f \in H'$ に対して $\exists! u \in H$ s.t.

$$a(u, v) = \langle f | v \rangle \quad \forall v \in H \quad (3.1)$$

さらに, この u に対して

$$\|u\|_H \leq c^{-1} \|f\|_{H'} \quad (3.2)$$

が成り立つ.

Proof. □

Definition 3.2 (Galerkin projection). Hilbert 空間 H の有限次元部分空間 \mathcal{U}_M を考える. Theorem 3.1 から得られる weak problem の解 u に対して, \mathcal{U}_M に Theorem 3.1 を適用して得られる解 $u^{(M)}$ を u の Galerkin solution という.

Lemma 3.3 (Galerkin 直交性). (3.1) の weak solution u と Galerkin solution $u^{(M)}$ に対し, その残差 $u - u^{(M)}$ は \mathcal{U}_M で a -直交である. つまり, 以下が成り立つ.

$$a(u - u^{(M)}, v) = 0 \quad \forall v^{(M)} \in \mathcal{U}_M \quad (3.3)$$

Proof. $\forall v^{(M)} \in \mathcal{U}_M$ を取る $v^{(M)} \in H$ でもあるので, $a(u, v^{(M)}) = \langle f | v^{(M)} \rangle$ と $a(u^{(M)}, v^{(M)}) = \langle f | v^{(M)} \rangle$ が成り立ち, 辺々引くと (3.3) が成り立つ. □

Lemma 3.4 (Céa's Lemma). $C, c > 0$ を Theorem 3.1 の定数とすると, (3.1) の weak solution u と Galerkin solution $u^{(M)}$ は以下を満たす.

$$\|u - u^{(M)}\| \leq \frac{C}{c} \inf\{\|u - v^{(M)}\|; v^{(M)} \in \mathcal{U}_M\} \quad (3.4)$$

Proof.

$$\begin{aligned} c\|u - u^{(M)}\|^2 &\leq |a(u - u^{(M)}, u - u^{(M)})| \\ &\leq |a(u - u^{(M)}, u - v^{(M)})| + |a(u - u^{(M)}, v^{(M)} - u^{(M)})| \\ &\text{Galerkin 直交性から第 2 項は 0} \\ &\leq C\|u - u^{(M)}\|\|u - v^{(M)}\| \end{aligned}$$

□

Remark 3.5. *Céa's Lemma* により定数倍の違いを除けば *Galerkin solution* は *optimal* である。

3.1 Stochastic Setting

\mathcal{U} : Hilbert 空間, $(\Theta, \mathcal{F}, \mu)$: 確率空間. $S = L^2(\Theta, \mu; \mathbb{R})$ に対して, $H := \mathcal{U} \otimes S \cong L^2(\Theta, \mu; \mathcal{U})$ と定める. (同型は S に可分性を仮定すると成り立つ.) $X, Y \in H$ に対して内積を $\langle X, Y \rangle_H = \mathbb{E}_\mu[\langle X, Y \rangle_{\mathcal{U}}]$ で定める.

Definition 3.6 (H 上の双線形形式と線形汎関数). \mathcal{U} 上の双線形形式-値確率変数 $A : \Theta \rightarrow (\mathcal{U} \times \mathcal{U} \rightarrow \mathbb{R})$ を用いて, H 上の双線形形式 α を以下で定める.

$$\alpha(X, Y) := \mathbb{E}_\mu[A(X, Y)] = \int_{\Theta} A(\theta)(X(\theta), Y(\theta)) d\theta \quad (3.5)$$

また, \mathcal{U}' -値確率変数 $F : \Theta \rightarrow \mathcal{U}'$ を用いて $\beta \in H'$ を以下で定める.

$$\langle \beta | X \rangle_H := \mathbb{E}_\mu[\langle F | X \rangle_{\mathcal{U}'}] \quad (3.6)$$

Definition 3.7 (Stochastic Weak Problem). *Stochastic Weak Problem* を以下で定める.

与えられた α, β に対して

$$\alpha(U, V) = \langle \beta | V \rangle \quad \forall V \in L^2(\Theta, \mu; \mathcal{U}) \quad (3.7)$$

を満たす $U \in L^2(\Theta, \mu; \mathcal{U})$ を求める.

Theorem 3.8 (Stochastic 'Uniform' Lax-Milgram). α, β を *Definition 3.6* で定義し, $\exists C, c > 0$ が $\theta \in \Theta$ に対して一様にとれて $\forall \theta \in \Theta$ で $A(\theta)$ が Hilbert 空間 \mathcal{U} に対して *Theorem 3.1* の仮定を満たすとする. このとき *Stochastic Weak Problem (3.7)* の解 $U \in L^2(\Theta, \mu; \mathcal{U})$ が唯一存在する.

Proof. $\alpha : H \times H \rightarrow \mathbb{R}$ が *Theorem 3.1* の仮定を満たすことを確認する. $X, Y \in H = L^2(\Theta, \mu; \mathcal{U})$ に対して,

(a):

$$\begin{aligned} |\alpha(X, Y)| &\leq \mathbb{E}_\mu[|A(X, Y)|] \\ &\leq \mathbb{E}_\mu[C \|X\|_{\mathcal{U}} \|Y\|_{\mathcal{U}}] \\ &\leq C \mathbb{E}_\mu[\|X\|_{\mathcal{U}}^2]^{1/2} \mathbb{E}_\mu[\|Y\|_{\mathcal{U}}^2]^{1/2} \\ &= C \|X\|_H \|Y\|_H \end{aligned}$$

(b):

$$\begin{aligned}\alpha(X, X) &= \mathbb{E}_\mu[A(X, X)] \\ &\geq \mathbb{E}_\mu[c\|X\|_{\mathcal{U}}^2] \\ &= c\|X\|_H^2\end{aligned}$$

□

参考文献

- [1] Timothy John Sullivan. *Introduction to uncertainty quantification*, volume 63. Springer, 2015.